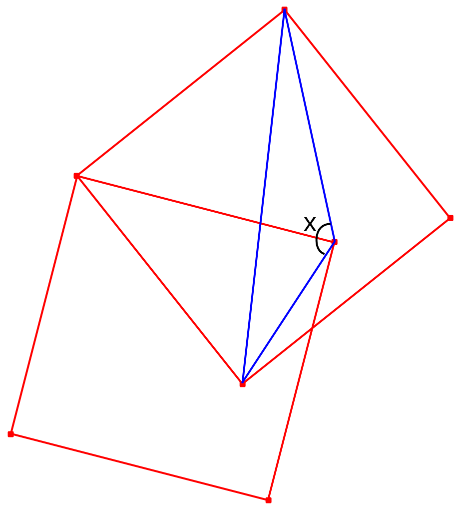
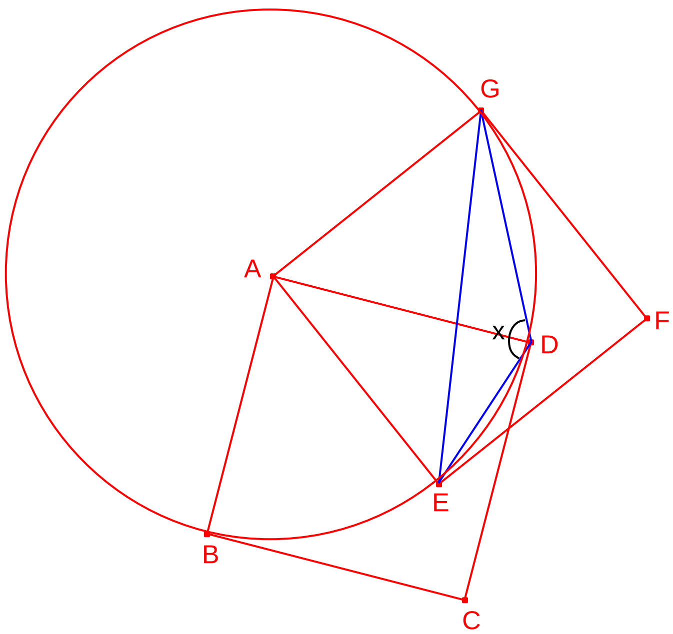
3511.- La figura està formada per dos quadrats iguals amb un vèrtex comú.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



ABCD, AEFG iguals

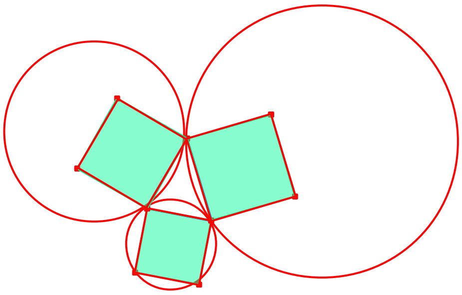
AB=AE=AD=AG

BEDG cíclic, centre A

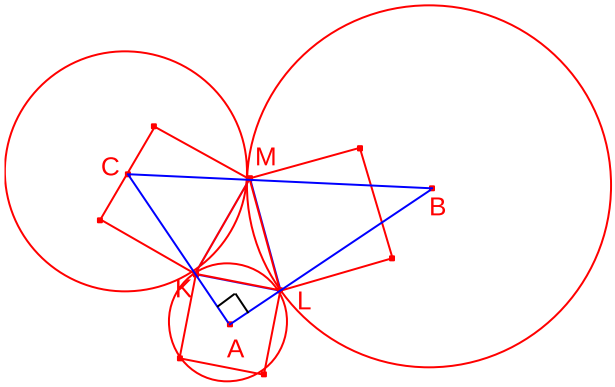
angleEAG=90º

x=270º/2=135º

3512.- Donats tres circumferències tangents de radis 1, 2, 3, calculeu la suma de les àrees dels tres quadrats dibuixats sobre els punts de tangència.



Solució:



AC=3, AB=4, BC=5

angleBAC=90º

$KL^2=2$

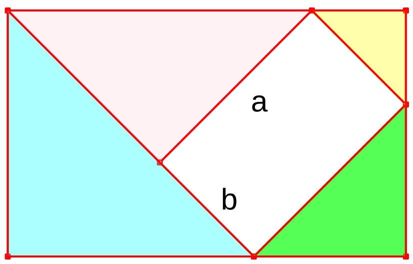
teorema cosinus LBM, CMN

$ML^2=18/5$

$KL^2=16/5$

[total]=44/5

3513.- La figura està formada per quatre triangles rectangles isòsceles i dos rectangles semblants.
Calculeu:
$\frac{a}{b}$



Solució:
Siguen els rectangles $ABCD, KLMN$ semblants.

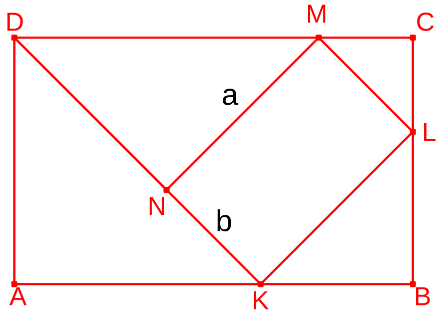
$\overline{BK}=\overline{BL}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

$\overline{CL}=\frac{\sqrt{2}}{2}b$

$\overline{DK}=a+b$

$\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{AK}=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$

$\overline{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}(2a+b)$



Aplicant el teorema de Tales als rectangles semblants:

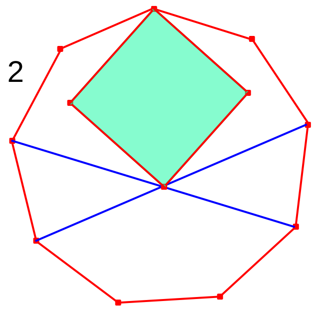
$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(2a+b)}{a}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)}{b}$$

Simplificant:

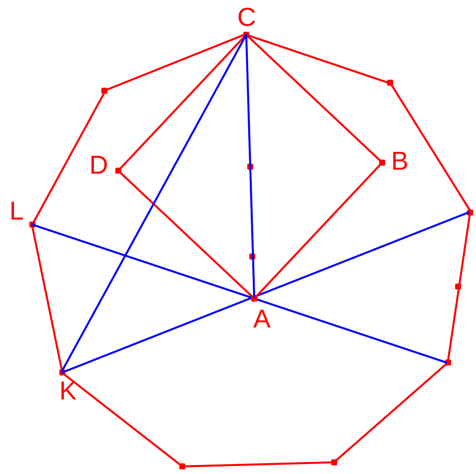
$a^2-ab-b^2=0$

$$\frac{a}{b}=\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

3514.- En un polígon regular de 9 costats de costat 2 s'han dibuixat dos diagonals i un quadrat.
Calculeu l'àrea del quadrat.



Solució:



KL=2

AC=x

AK=y

angleKCA=30º, angle CKA=40º

Teorema sinus KAC

x/sin40º=y=sin30º

angle LAK=40º, angleKLA=60º

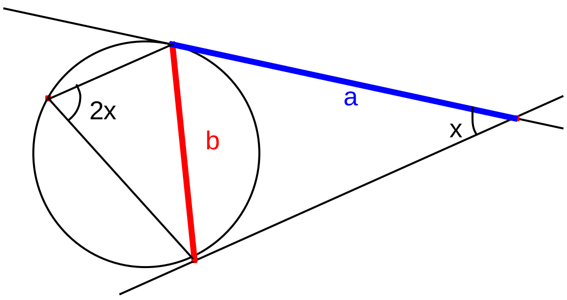
teorema sinus AKL

2/sin40º=y/sin60º

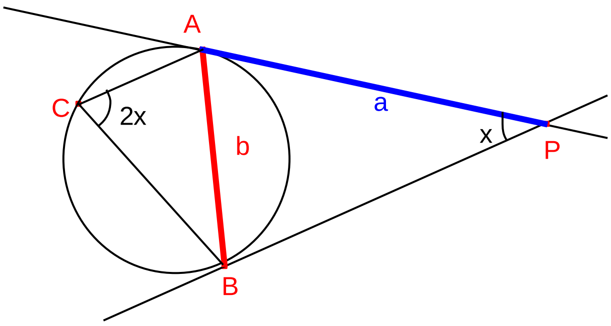
x=2·sqrt(3)

[ABCD]=x²/2=6

3515.- Des d'un punt exterior d'una circumferència s'han traçat dues tangents. Calculeu la proporció dels segments:
$\frac{a}{b}$



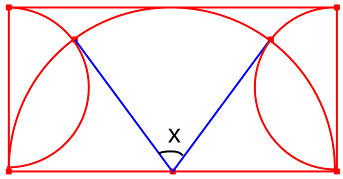
Solució:



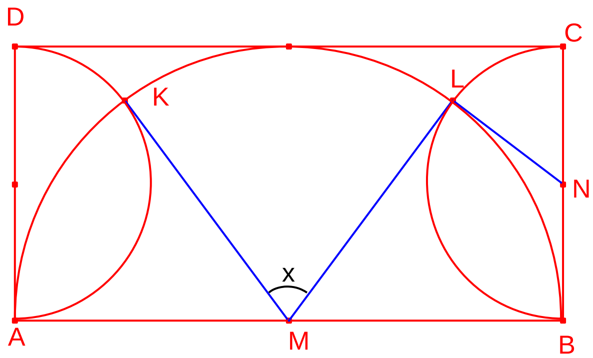
Per ser $\angle ACB$ angle inscrit en la circumferència:
$\widehat{AB} = 4x$
$\widehat{ACB} = 360° - 4x$

Per ser $\angle APB$ angle exterior a la circumferència:
$x = \frac{360° - 4x - 4x}{2}$
Resolent l'equació:
$x = 36°$
El triangle isòsceles $\overset{\Delta}{APB}$ és auri, aleshores:
$\frac{a}{b} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

3516.- La figura està formada per un rectangle i tres semicircumferències.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



angleLMN=y

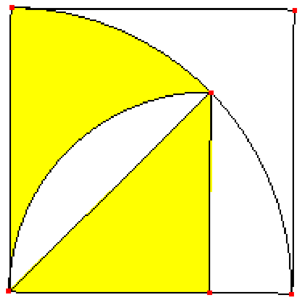
tan(y/2)=1/2

tan(y)=4/3

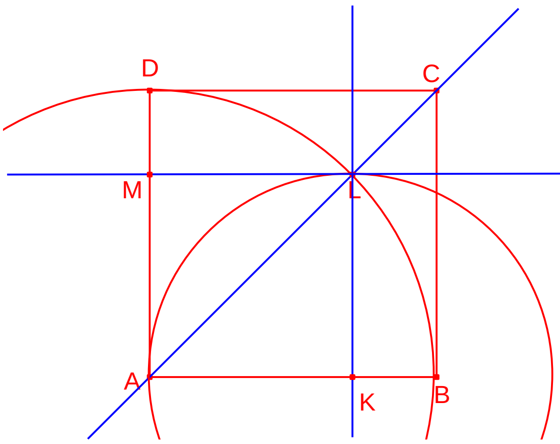
x=180º-2y

tan(x)=-tan(2y)=24/7

3517.- La figura està formada per un quadrat que conté dos quadrants.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



Solució:



P= sector radi R, angle 45º

Q=segment radi R(sqrt(2)/2), angle 90º

Q=[AKLM]-sector radi R(sqrt(2)/2), angle 90º

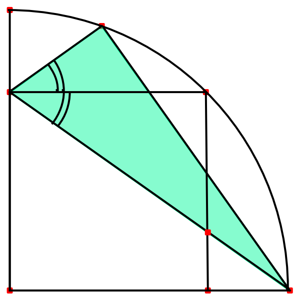
àrea ombrejada= P+Q

P+Q=[AKLM]=R²/2

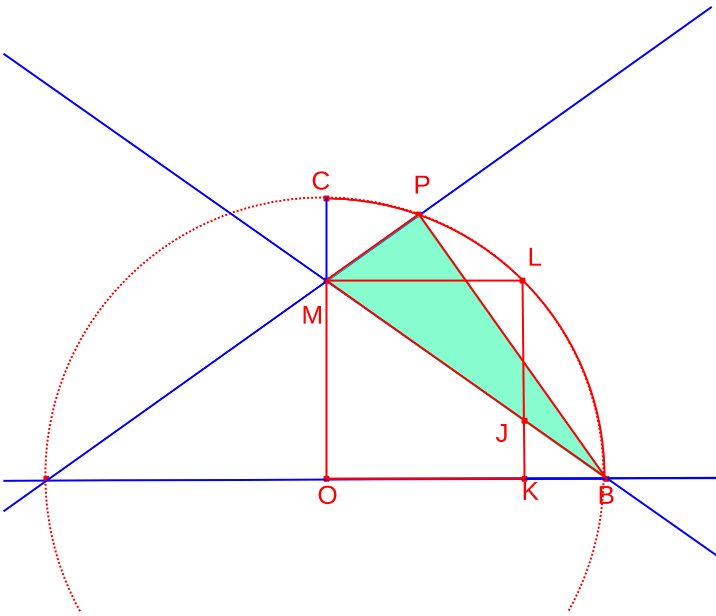
[ABCD]=R²

(P+Q)/[ABCD]=1/2

3518.- El quadrat inscrit en el quadrant de cercle té àrea 3.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.

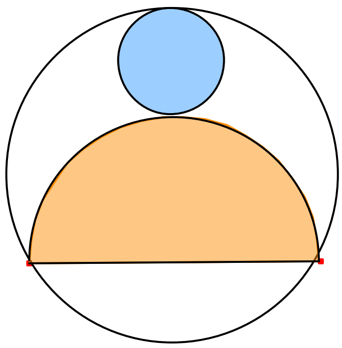


Solució:

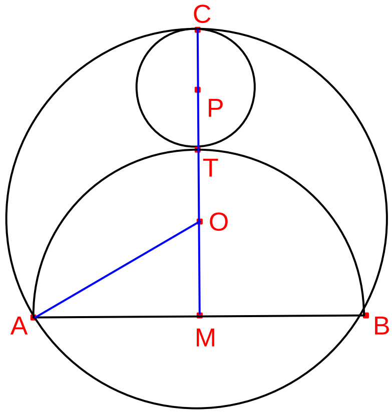


anglePML=angleLMB=a
aleshores, angleMPB=90º
[OKLM]=3
OK=sqrt(3)
OL=sqrt(6)
MB=3
MLJ, BKJ semblants
Teorema Tales
LJ=sqrt(6)/2
tan a=sqrt(2)/2
MP=3·cos(2a)=1
PB=2·sqrt(2)
[MPB]=sqrt(2)

3519.- La proporció entre l'àrea regió ombrejada i l'àrea del cercle exterior de la figura és mínima.
Calculeu la proporció entre l'àrea del semicercle l'àrea del cercle exterior.



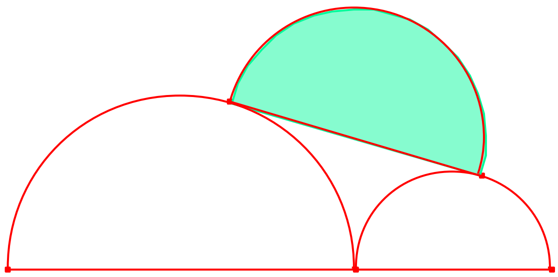
Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OC} = R$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PC} = \overline{PT} = s = 1$
Siga la semicircumferència de centre M i radi $\overline{MA} = \overline{MT} = r$
$\overline{OM} = 2 + r - R$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:
$$R^2 = r^2 + (2 + r - R)^2$$
$$R = \frac{r^2 + 2r + 2}{2 + r}$$
La proporció entre l'àrea regió ombrejada i l'àrea del cercle exterior és:
$$p(r, R) = \frac{\frac{1}{2}r^2 + 1}{R^2}$$
$$p(r) = \frac{\frac{1}{2}r^4 + 2r^3 + 3r^2 + 4r + 4}{r^4 + 4r^3 + 8r^2 + 8r + 4}$$
$$p'(r) = \frac{2r^5 + 4r^4 - 8r^3 - 32r^2 - 40r - 16}{(r^4 + 4r^3 + 8r^2 + 8r + 4)^2}$$

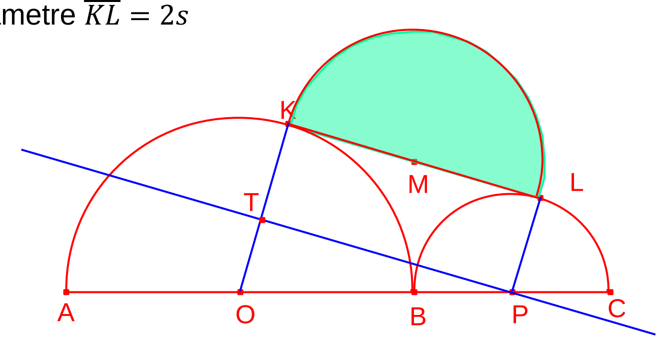
$$p'(r) = 0$$
$$r = 1 + \sqrt{3}$$
$$p"\left(1 + \sqrt{3}\right) > 0$$
Quan la regió ombrejada és mínima:
$$R = \frac{2\left(3 + \sqrt{3}\right)}{3}$$
La proporció entre l'àrea del semicercle l'àrea del cercle exterior és:
$$\frac{S_M}{S_O} = \frac{\frac{1}{2}r^2}{R^2} = \frac{3}{8}$$

3520.- Donades dues semicircumferències tangents s'ha dibuixat una semicircumferència que té per diàmetre el segment de tangència de les dues.



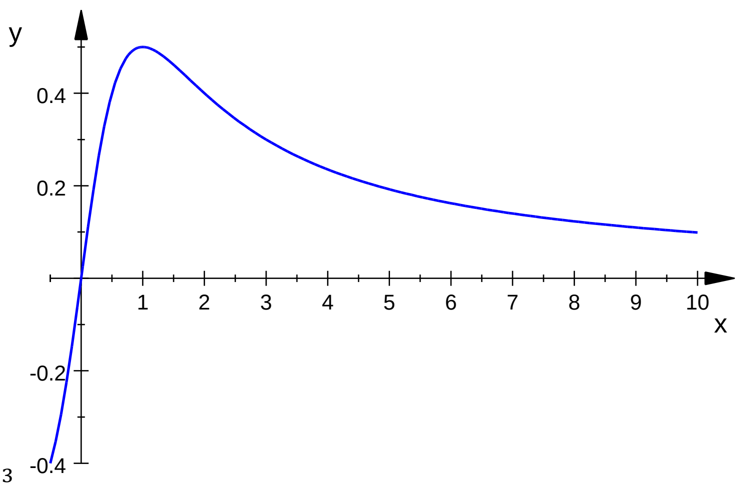
a) Calculeu la proporció entre l'àrea de la semicircumferència ombrejada i la suma de les altres dues.
b) Per a quins radis de les dues inicials el valor de la proporció de les àrees és $\frac{1}{4}$
c) Determineu quan la proporció d'àrees és màxima

Solució:
Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$
Siga la semicircumferència de centre Q i diàmetre $\overline{BC} = k \cdot 2R$
(La proporció entre les dues circumferències tangents en B és k)
Siga $\overline{KL}$ segment tangent exterior a les dues semicircumferència.
Siga la semicircumferència de centre M i diàmetre $\overline{KL} = 2s$
Siga T la projecció de P sobre el radi $\overline{OK}$
$\overline{OT} = R - kR, \overline{TP} = 2s, \overline{OP} = R + kR$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTP}$:



$\left((1+k)R\right)^2 = \left((1-k)R\right)^2 + 4s^2$
$4k \cdot R^2 + 4s^2$
$s^2 = k \cdot R^2$

a)
La proporció de les àrees és:
$$P(k) = \frac{s^2}{R^2 + (k \cdot R)^2} = \frac{k}{1+k^2}$$



b)
Calculeu el valor de k a fi que
$$P(k) = \frac{1}{4}$$
$$\frac{k}{1+k^2} = \frac{1}{4}$$
Resolent l'equació:
$k = 2 \pm \sqrt{3}$
c)
Calculem la derivada de la funció:
$$p'(k) = \frac{1-k^2}{(1+k^2)^2}, \qquad p"(k) = \frac{-6k+2k^3}{(1+k^2)^3}$$
$P'(k) = 0$, quan $k = 1$.
$p"(1) < 0$
Aleshores, el màxim s'assoleix quan les dues circumferències inferiors són iguals.