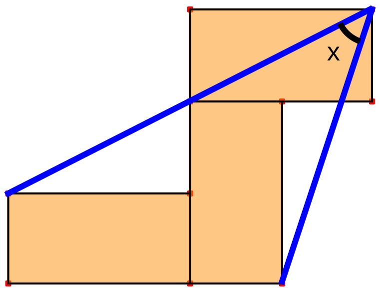
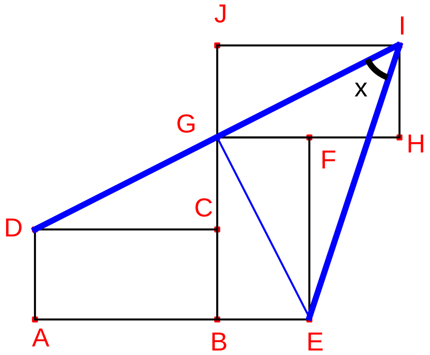
3521.- En la figura els tres rectangles són iguals.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:

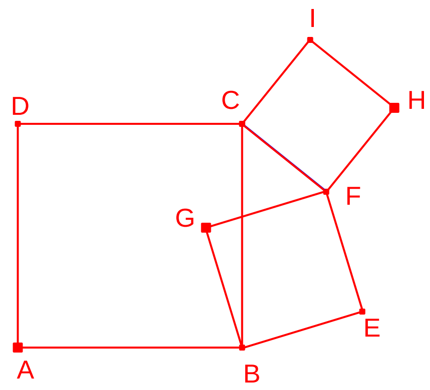


GE.GI perpendiculars

GI=GE

x=45º

3522.- Donats els tres quadrats de la figura, demostreu que els vèrtexs A, G, H estan alineats.

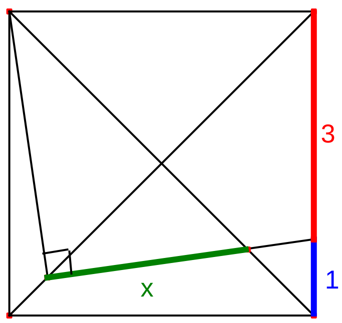


Solució:

Els triangles $\overset{\Delta}{GFH}, \overset{\Delta}{EFC}$ són iguals i estan firats 90º amb centre F.
Aleshores, $\overline{CE}, \overline{GH}$ són iguals i perpendiculars.

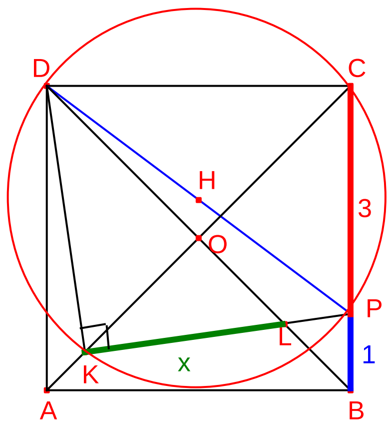
Els triangles $\overset{\Delta}{ABG}, \overset{\Delta}{CBE}$ són iguals i estan firats 90º amb centre B.
Aleshores, $\overline{AG}, \overline{CE}$ són iguals i perpendiculars.
Aleshores, , $\overline{AG}, \overline{GE}$ estan estan alineats.

3523.- La figura està formada per un quadrat dues diagonals i dos segments perpendiculars.
Calculeu la mesura del segment x.



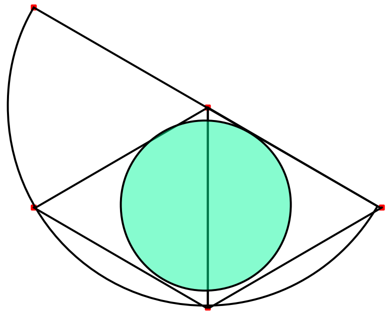
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre O i costat $\overline{AB} = 4$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DCP}$:
$\overline{DP} = 5$
El quadrilàter $KPCD$ és inscriptible ja que té dos angles oposats rectes:
$\angle DCK = \angle PCK = 45°$
Aleshores, $\overline{DK} = \overline{PK}$

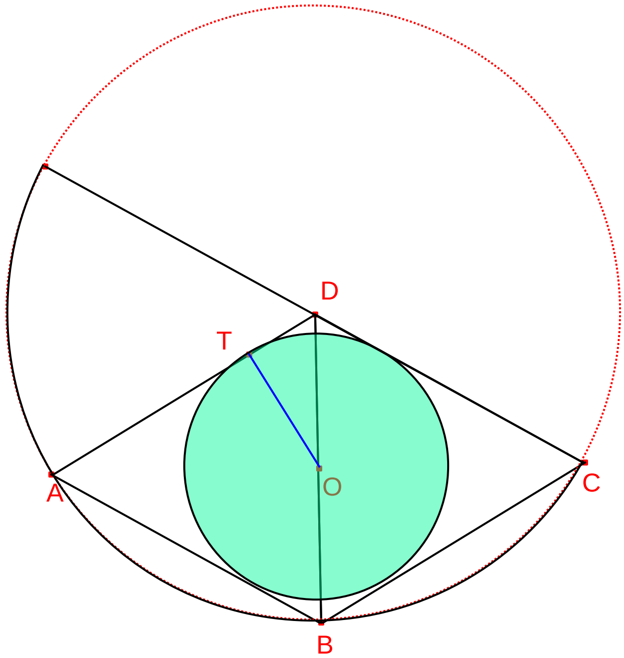


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle issòsceles $\overset{\Delta}{DKP}$:
$$\overline{DK} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle issòsceles $\overset{\Delta}{DOA}$:
$$\overline{OD} = 2\sqrt{2}$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DOK}$:
$$\overline{KO} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DKL}, \overset{\Delta}{KOL}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{x}{\frac{5\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}}$$
Resolent l'equació:
$$x = \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

3524.- La figura està formada per dos triangles equilàters, un cercle i un semicercle.
Calculeu la proporció entre l'àrea del cercle i la del semicercle.



Solució:



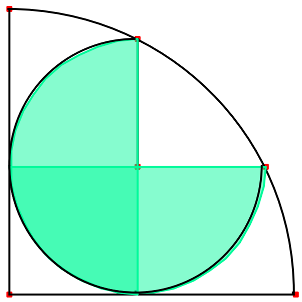
OT=r
DA=R

OD=(2/3)sqrt(3)·r

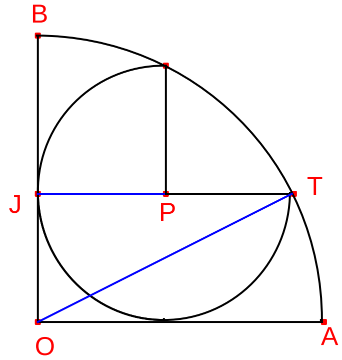
R=(4/3)sqrt(3)·r

Prop=2r²/R²=3/8

3525.- En la figura, calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrant.



Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OT} = R$

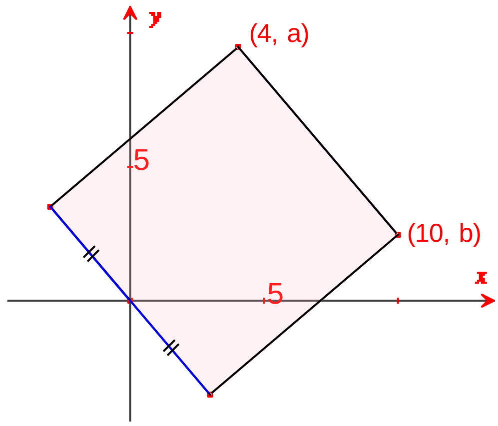


L'àrea està formada per un sector de centre P de radi $\overline{PT} = r$ i angle 270º
Siga J el punt de tangència del sector de centre P i el radi $\overline{OB}$
$\overline{OJ} = r, \overline{JT} = 2r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{OJT}$:
$R^2 = 5r^2$

La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_P}{S_O} = \frac{\frac{3}{4}\pi r^2}{\frac{1}{4}\pi R^2} = \frac{3}{5}$$

3526.- El quadrat de la figura té l'origen de coordenades en el punt mig d'un costat i dos vèrtexs són els punts $(4, a), (10, b)$
Calculeu l'àrea del quadrat.

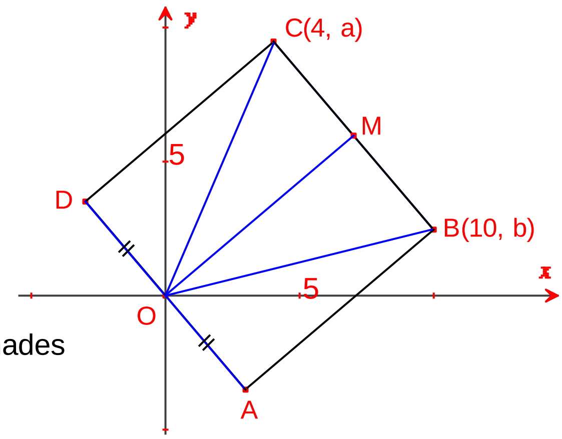


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = x$
Siga $\overline{OA} = \overline{OD} = \frac{1}{2}x$
$\overline{OC} = \sqrt{16 + a^2}, \overline{OB} = \sqrt{100 + b^2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles $O\overset{\Delta}{D}C, O\overset{\Delta}{A}B$:

$$16 + a^2 = \frac{5}{4}x^2$$
$$100 + b^2 = \frac{5}{4}x^2$$
$$a^2 = \frac{5}{4}x^2 - 16, b^2 = \frac{5}{4}x^2 - 100$$

Aleshores:

$$a = \sqrt{\frac{5}{4}x^2 - 16}, \qquad b = \sqrt{\frac{5}{4}x^2 - 16}, a^2 = 84 + b^2$$



Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$. Les seues coordenades són:

$$M\left(7, \frac{a+b}{2}\right)$$
$$\overline{OM} = \sqrt{49 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = x$$

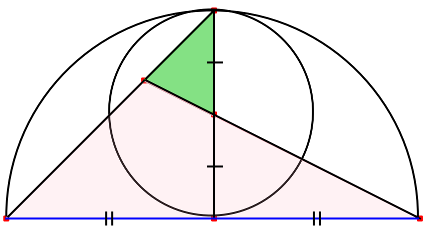
Elevant al quadrat:

$$49 + \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4} = x^2$$
$$196 + a^2 + b^2 + 2ab = 4x^2$$
$$196 + \frac{5}{4}x^2 - 16 + \frac{5}{4}x^2 - 100 + 2ab = 4x^2$$
$$2ab = \frac{3}{2}x^2 - 80$$
$$2\sqrt{\frac{5}{4}x^2 - 16}\sqrt{\frac{5}{4}x^2 - 100} = \frac{3}{2}x^2 - 80$$

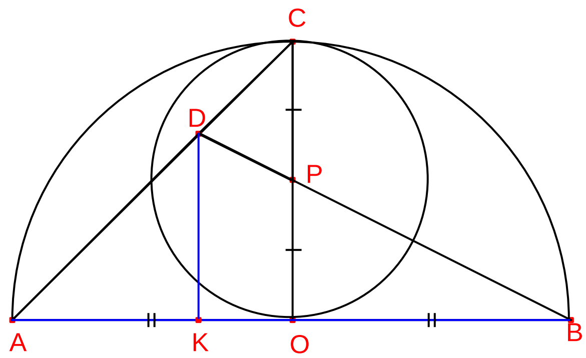
Elevant al quadrat:
$4x^4 - 340x^2 = 0$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = x^2 = 85$

També, $a = \frac{19}{2}, b = \frac{5}{2}$

3527.- La figura està formada per un semicercle un cercle tangent al semicercle i al diàmetre del semicercle i dos triangles.
Calculeu la proporció entre les àrees del triangle verd i el triangle rosa.



Solució 1:

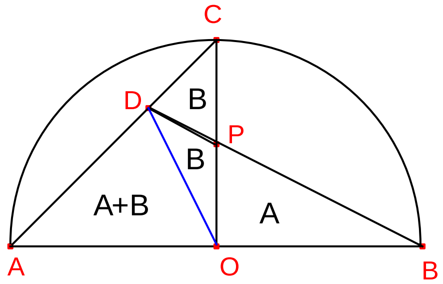


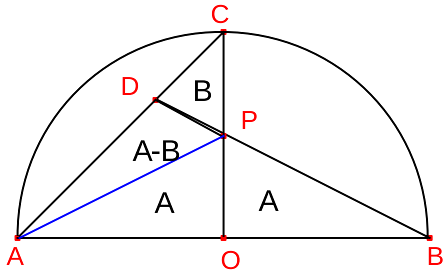
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OA} = 2r$
Siga el cercle de centre P i radi $\overline{PO} = \overline{PC} = r$
Les rectes AC i BP és tallen en D.
Siga K la projecció de D sobre el diàmetre $\overline{AB}$
Siga $\overline{AK} = \overline{DK} = a$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BOP}, \overset{\Delta}{BKD}$ són semblant
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{BK} = 2 \cdot \overline{DK} = 2a$
Aleshores:
$3a = 4r$
$a = \frac{4}{3}r$
L'àrea verda és:
$S_{CDP} = \frac{1}{2}\overline{CP} \cdot \overline{OK} = \frac{1}{2}r \cdot (2r - a) = \frac{1}{3}r^2$
L'àrea rosa és:
$S_{ABD} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{DK} = \frac{1}{2}4r \cdot a = \frac{8}{3}r^2$
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{CDP}}{S_{ABD}} = \frac{\frac{1}{3}r^2}{\frac{8}{3}r^2} = \frac{1}{8}$$

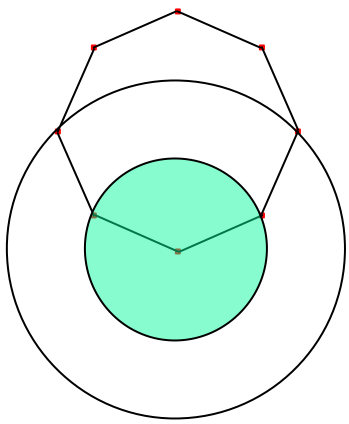
Solució 2:





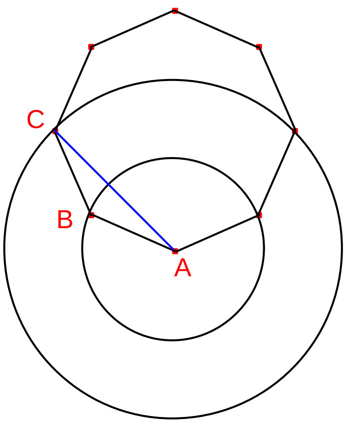
[AOPD]=A+2B=2A-B
A=3B
[CDP]/[ABD]=B/(2A+2B)=1/8

3528.- La figura esta formada per dues circumferències concèntriques i un octògon regular.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos cercles.

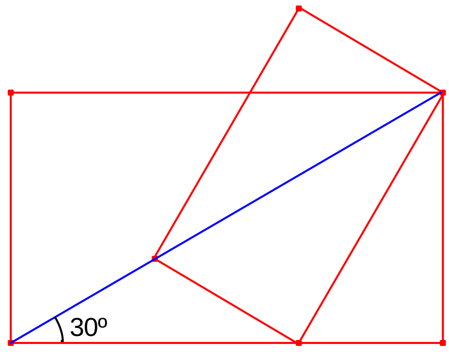


Solució:
Siga la circumferència de centre A i radi $\overline{AB} = r$
Siga la circumferència de centre A i radi $\overline{AC} = R$
$\angle ABC = 135°$

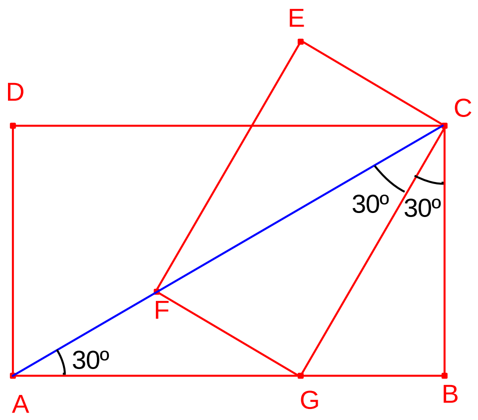
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
$R^2 = \left(2 + \sqrt{2}\right) r^2$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_r}{S_R} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$



3529.- Els dos rectangles de la figura són semblants.
Si el menut té àrea 4, calculeu l'àrea del rectangle gran.



Solució:



[CEFG]=4

AB=a

BC=sqrt(3)/3·a

CG=b

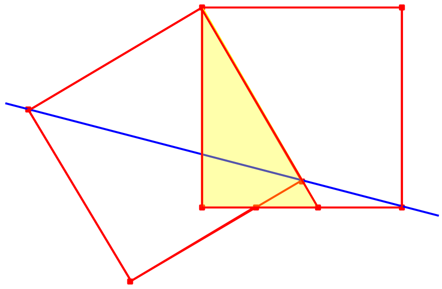
BC/CG=sqrt(3)/2

a/b=3/2

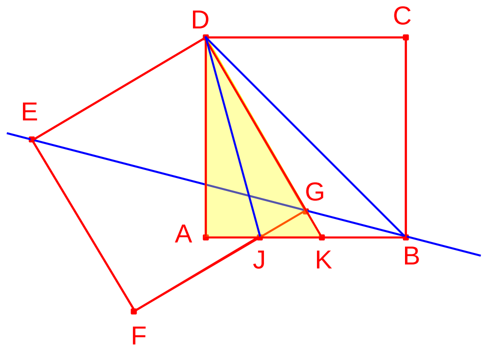
[ABCD]/4=(a/b)²=9/4

[ABCD]=9

3530.- Els dos quadrats de la figura són iguals. Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total.



Solució:
Siguen els quadrats $ABCD, DEFG$ de costats $\overline{AB} = \overline{DE} = 1$
Siga $\overline{AJ} = x$
Siga $\overline{BG} = y$
Siga $\angle ADK = \alpha$



$\angle GJB = \alpha$
$\angle JGB = \angle DGB = 135°, \angle JBG = \angle GDB = 45° - \alpha$
Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{JBG}, \overset{\Delta}{BGD}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales.
$\frac{y}{1} = \frac{x}{y}$
$y^2 = x$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{JBG}$
$(1 - x)^2 = x^2 + x + x\sqrt{x}$
Resolent liquació:
$x = 2 - \sqrt{3}$
$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{1} = 2 - \sqrt{3}, \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\overline{AK} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$S_{AKD} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$
L'àrea total és:
$S_{BCDEFJ} = 2 \cdot S_{ABCD} - S_{AJGD} = 2 - x = \sqrt{3}$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{AKD}}{S_{BCDEFJ}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}$