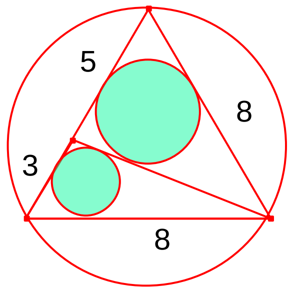
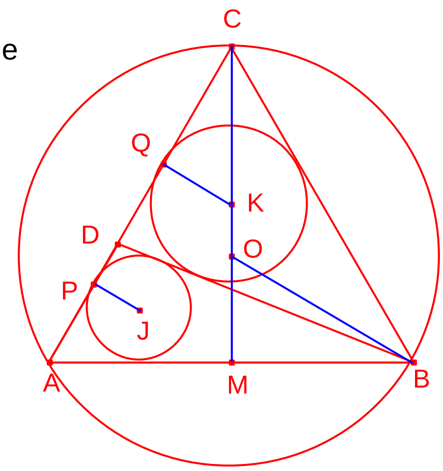
3531.- Un triangle està inscrit en una circumferència. Calculeu la proporció entre la suma de les àrees de de les dues circumferència ombrejades i la circumferència circumscrita al triangle.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 8$
Siga D el punt del costat $\overline{AC}$ tal que $\overline{AD} = 3, \overline{CD}$=5
Siga O el centre de la circumferència circumscrita al triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de radi $\overline{OB} = R$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
$\overline{MB} = 4$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$:

$$R = \frac{8}{3}\sqrt{3}$$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$

$$\overline{BD}^2 = 9 + 64 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\overline{BD} = 7$$

Siga $r = \overline{JP}, s = \overline{KQ}$ els radis de les circumferències inscrites als triangle $\overset{\Delta}{ABD}, \overset{\Delta}{BCD}$, respectivament.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és:

$$S_{ABD} = \frac{3+7+8}{2} r = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 \cdot \sin 60°$$

$$r = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és:

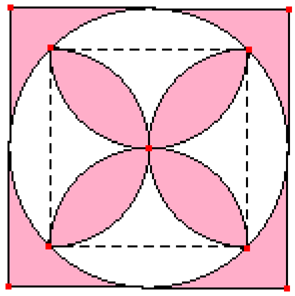
$$S_{BCD} = \frac{5+7+8}{2} s = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 60°$$

$$s = \sqrt{3}$$

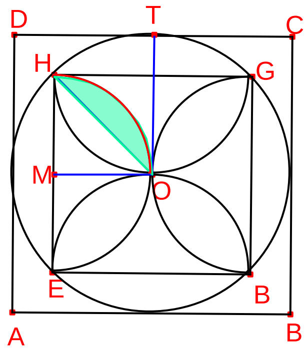
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_R} = \frac{r^2 + s^2}{R^2} = \frac{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}{\left(\frac{8}{3}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{13}{64}$$

3532.- En la figura determineu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2r$
$S_{ABCD} = 4r^2$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OT} = \overline{OH} = r$
Siga M el punt mig del costat $\overline{EH}$
$\overline{MO} = \frac{\sqrt{2}}{2} r$

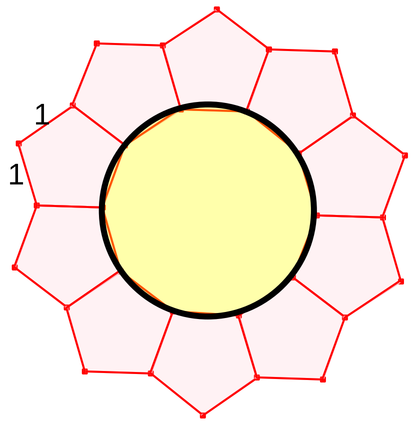


L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del quadrat $ABCD$ menys l'àrea del cercle de centre O més l'àrea de vuit segments circulars de centre M i de 90º i radi $\overline{MO}$

$$S_{ombrejada} = 4r^2 - \pi r^2 + 8\left(\frac{1}{4}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2 = 2r^2$$

La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{2r^2}{4r^2} = \frac{1}{2}$$

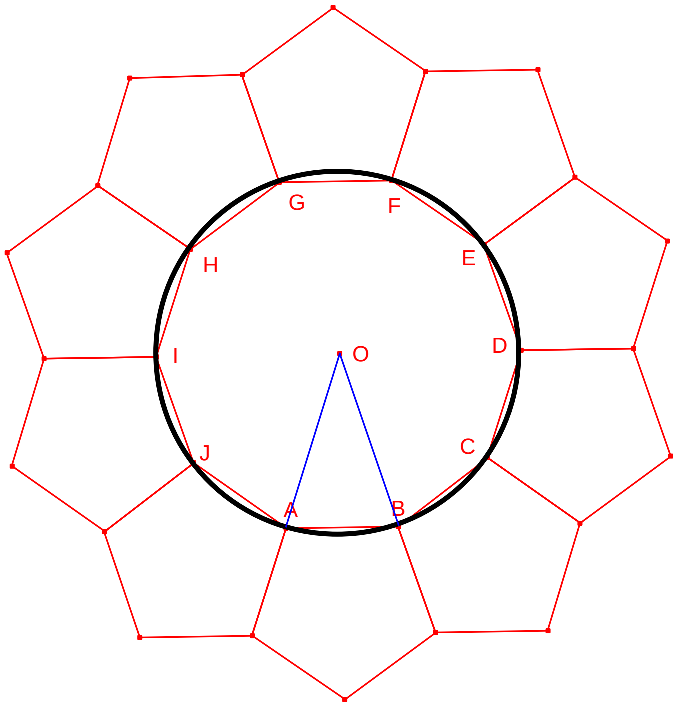
3533.- Els pentàgons de la figura tenen costat 1.
Calculeu el radi de la circumferència



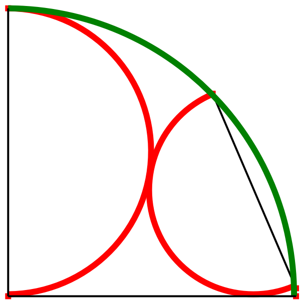
Solució
Els costats dels 10 pentàgons regulars formen un decàgon regular $ABCDEFGHIJ$ de costat $\overline{AB} = 1$ de centre O.
Siga $\overline{OA} = R$ radi de la circumferència circumscrita al decàgon regular.
El triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABO}$ és auri, $\angle AOB = 36°$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

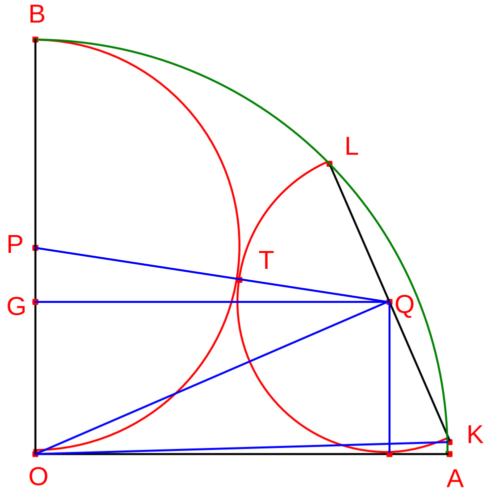
$$R = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



3534.- La figura està formada per un quadrant i dues semicircumferències tangents.
Calculeu la proporció entra la suma de les longituds de les dues semicircumferències i la longitud del quadrant.



Solució:



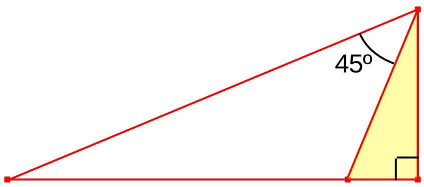
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OK} = 1$
Siga la semicircumferència de centre P i radi $\overline{PO} = \overline{PT} = \frac{1}{2}$
Siga la semicircumferència de centre Q i radi $\overline{QK} = \overline{QT} = r$

Q és el punt mig de la corda $\overline{KL}$, aleshores, $\overline{OQ}$ és perpendicular a $\overline{KL}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQK}$:
$\overline{OQ} = \sqrt{1 - r^2}$

Siga G la projecció de Q sobre $\overline{OB}$.
$\overline{PQ} = \frac{1}{2} + r, \overline{PG} = \frac{1}{2} - r, \overline{OG} = r$

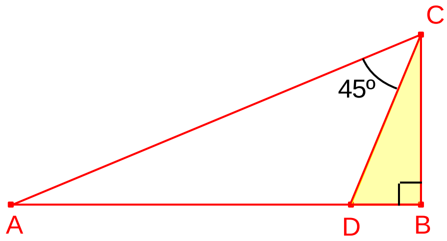
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{PGQ}$, $\overset{\Delta}{OGQ}$:
$$\left(\frac{1}{2} + r\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - r\right)^2 = \left(\sqrt{1 - r^2}\right)^2 - r^2$$
Simplificant:
$2r^2 + 2r - 1 = 0$
Resolent l'equació:
$$r = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$
La proporció de les longituds és:
$$\frac{L_{suma}}{L_O} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1} = \sqrt{3}$$

3535.- El triangle rectangle de la figura e divideix en dos.
Calculeu la proporció màxima entre l'àrea groga i l'àrea del triangle rectangle.



Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, B = 90°, \overline{BC} = a, \overline{AN} = c, \overline{BD} = d$
Siga $\alpha = \angle BAC$
$\angle DCB = 45° - \alpha$



$$\tan\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\frac{d}{a} = \tan(45° - \alpha) = \frac{1 - \frac{a}{c}}{1 + \left(\frac{a}{c}\right)^2} = \frac{(c-a)}{a^2 + c^2}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{DBC}}{S_{ABC}} = \frac{ad}{ac} = \frac{d}{c} = \frac{(c-a)a}{a^2 + c^2} = \frac{\left(1 - \frac{a}{c}\right)\frac{a}{c}}{1 + \left(\frac{a}{c}\right)^2}$$

Siga $\frac{a}{c} = x$
La funció proporció d'àrees és:

$$f(x) = \frac{x(1-x)}{1+x^2}, \qquad 0 \le x \le 1$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(1+x^2)^2}$$

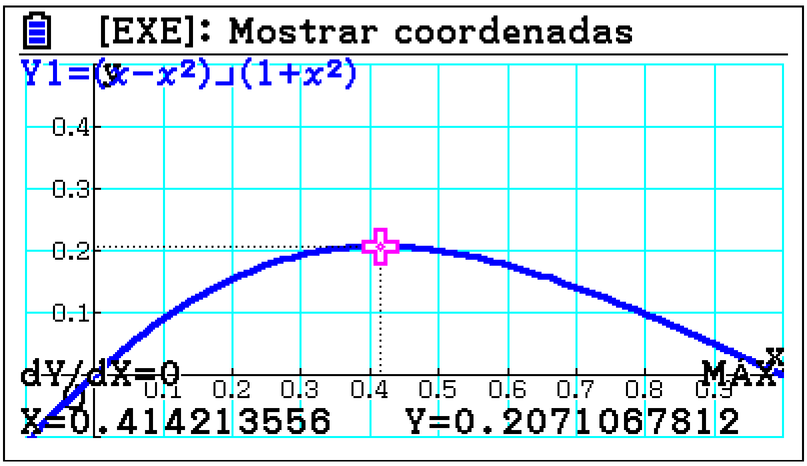
$$f'(x) = 0$$

$$x = -1 + \sqrt{2}$$

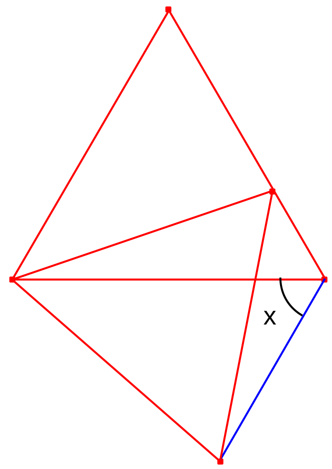
$$f''\left(-1 + \sqrt{2}\right) < 0$$

Aleshores, quan $x = -1 + \sqrt{2}$ la proporció d'àrees és màxima.
La proporció màxima és:

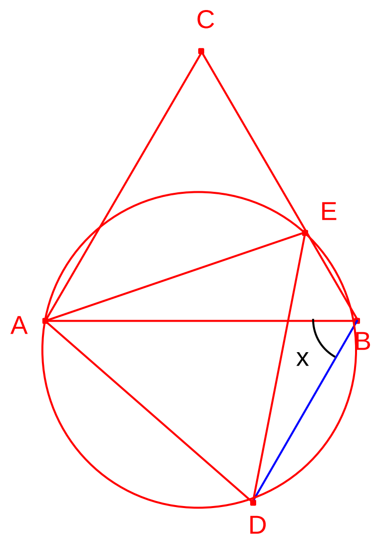
$$f\left(-1 + \sqrt{2}\right) = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$$



3536.- En la figura, s'han dibuixat dos triangles equilàters.
Determineu la mesura de l'angle x



Solució:

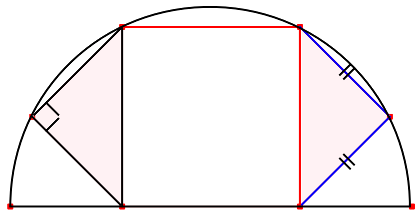


angle ABE=angleACE=60º

ADBE cíclic

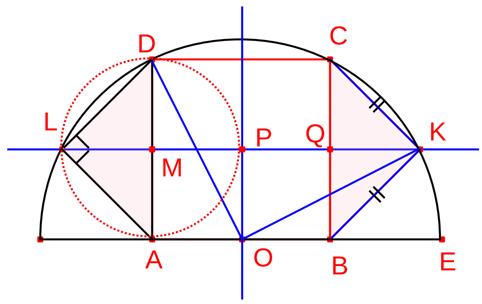
x=angleABC=angleAED=60º

3537.- En una semicircumferència s'ha inscrit un quadrat de costat 1.
Calculeu l'àrea total ombrejada formada per un triangle isòsceles i un rectangle



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$

La mediatriu del costat $\overline{BD}$ passa pel vèrtex K del triangle isòsceles $B\overset{\Delta}{C}K$
La mediatriu del costat $\overline{BD}$ passa pel centre P del quadrat $ABCD$.
La mediatriu del costat $\overline{CD}$ passa pels punts P, O.
Els triangles rectangles $D\overset{\Delta}{A}O, K\overset{\Delta}{P}O$ són iguals.
$\overline{PK} = 1, \overline{QK} = \dfrac{1}{2}$
Aleshores, $\angle BKC = 90°$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$
$\overline{ML} = \dfrac{1}{2}$
L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = \overline{BC} \cdot \overline{QK} = \dfrac{1}{2}$



3538.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ pel vèrtexs B i C es tracen les tangents a la circumferència circumscrita que es tallen en el punt P.
Proveu que la recta AP és simètrica de la mitjana del vèrtex A respecte de la bisectriu del vèrtex A.

Solució
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$
$\overline{PB} = \overline{PC}$
Siga la bisectriu AN, N és el punt mig de l'arc $\widehat{BC}$
La mediatriu del costat $\overline{BC}$ passa pe P

Siga $\alpha = \angle CAH$

$$\angle AHC = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BG}}{2} = B + A - \alpha$$

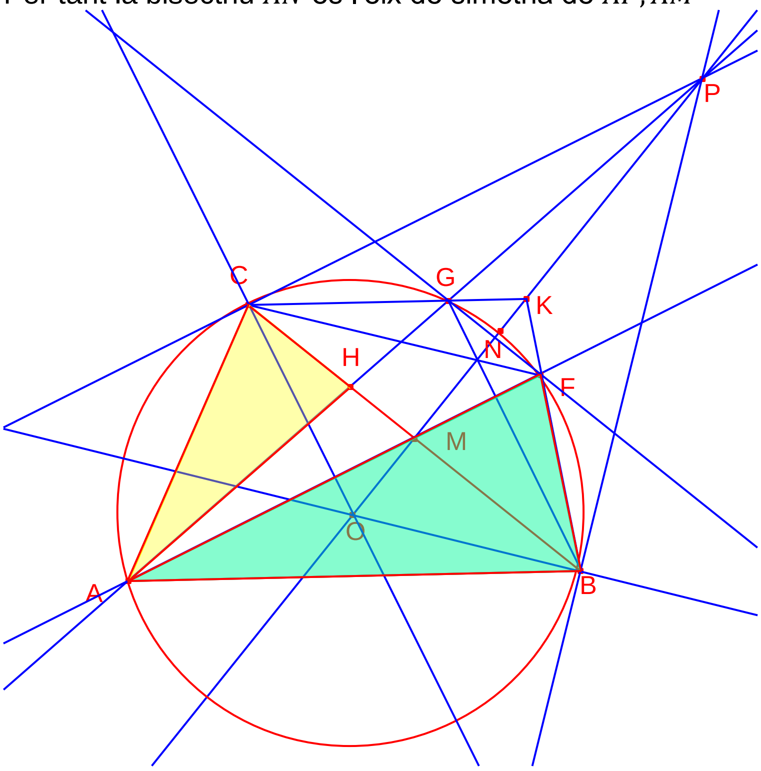
$\overline{CK} = \overline{BK}$ ja que els triangles $\overset{\Delta}{COK}, \overset{\Delta}{BOK}$ són iguals (CAC).
$\overset{\Delta}{CKF}, \overset{\Delta}{BKG}$ són iguals (ACA)
$\overline{KG} = \overline{KF}$, $\overline{FG}, \overline{BC}$, paral·lels.

Aleshores, $\overline{BF} = \overline{CG}$

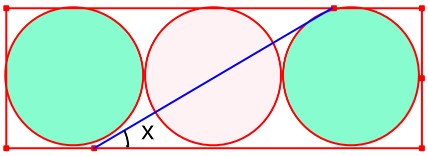
$\angle ABF = B + A - \alpha$
$\angle AFB = \angle ACB$

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ACH}, \overset{\Delta}{AFB}$ són semblants.
Per tant, $\angle FAB = \angle CAH = \alpha$

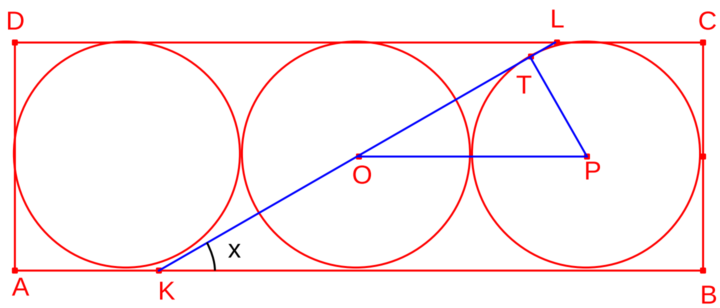
Aleshores, $\angle HAN = NAM$
Per tant la bisectriu AN és l'eix de simetria de AP, AM



3539.- Tres circumferències tangents iguals, estan inscrites en un rectangle.
S'ha dibuixat una recta tangent interior a la de l'esquerra i a la de la dreta.
Calculeu la mesura de l'angle x

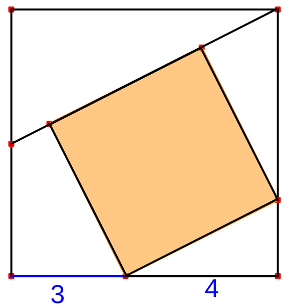


Solució:



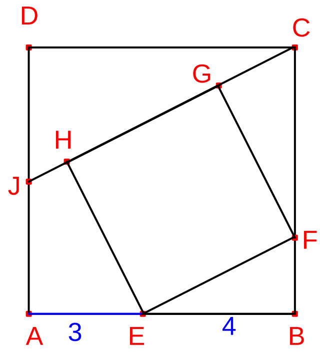
Siguen les circumferències tangents de radi r.
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 6r, \overline{BC} = 2r$
Siga $x = \angle LKB = x$
Siguen els punts O, P centres de les circumferències central i de la dreta.
$\overline{OP}$ és paral·lel a $\overline{AB}$
$\angle TOP = x$
$\overline{OP} = 2r, \overline{PT} = r, \angle OTP = 90°$
$x = 30°$

3540.- El costat d'un quadrat s'ha dividit en dos segments d longituds 3 i 4
Calculeu l'àrea del quadrat ombrejat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 7$
Siga el quadrat $EFGH$ de costat $\overline{EF} = c$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EBF}$:
$\overline{BF} = \sqrt{c^2 - 16}$
$\overline{CF} = 7 - \sqrt{c^2 - 16}$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EBF}, \overset{\Delta}{FGC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{4}{c} = \frac{c}{7 - \sqrt{c^2 - 16}}$
$28 - c^2 = 4\sqrt{c^2 - 16}$
$c^4 - 72c^2 + 1040 = 0$
Resolent l'equació:
$c^2 = 20$
L'àrea del quadrat ombrejat és:
$S_{EFGH} = c^2 = 20$