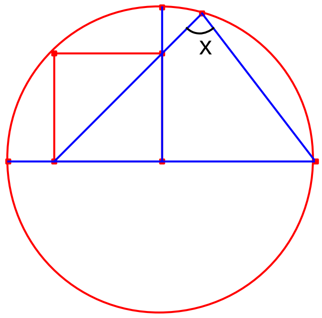
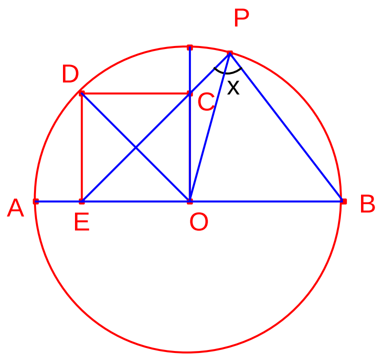
3541.- Sobre un quadrant de circumferència s'ha dibuixat un quadrat.
Calculeu la mesura de l'angle x.

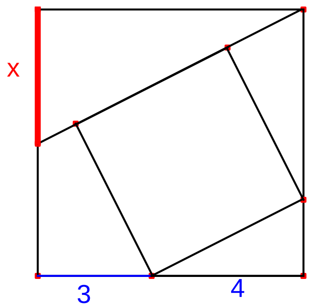


Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = 1$
Siga el quadrat $OCDE$.
Siga $x = \angle EPB$

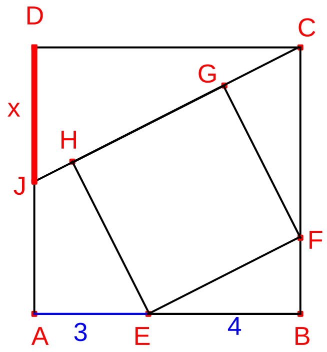


Siga $\angle EPO = \alpha$
$\overline{OE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\angle PEO = 45°, \overline{OP} = 1$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{EOP}$:
$\frac{1}{\sin 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin \alpha}$
$\sin \alpha = \frac{1}{2}$
Aleshores,
$\alpha = 30°$
$\angle POB = 45° + 30° = 75°$
El triangle $\overset{\Delta}{BOP}$ és isòsceles:
$\angle OPB = \frac{180° - 75°}{2} = \frac{105°}{2}$
$x = \angle EPB = \alpha + \angle OPB = \frac{180° - 75°}{2} = 30° + \frac{105°}{2} = \frac{165°}{2} = 82°\,30'$

3542.- El costat d’un quadrat s’ha dividit en dos segments d longituds 3 i 4
Calculeu la mesura del segment x.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 7$
Siga el quadrat $EFGH$ de costat $\overline{EF} = c$

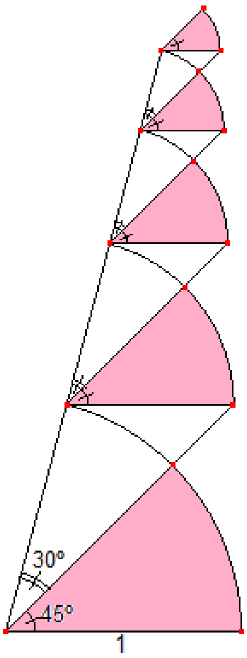


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EBF}$:
$\overline{BF} = \sqrt{c^2 - 16}$
$\overline{CF} = 7 - \sqrt{c^2 - 16}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EBF}, \overset{\Delta}{FGC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{4}{c} = \frac{c}{7 - \sqrt{c^2 - 16}}$
$28 - c^2 = 4\sqrt{c^2 - 16}$
$c^4 - 72c^2 + 1040 = 0$
Resolent l’equació:
$c^2 = 20$
$\overline{BF} = \sqrt{c^2 - 16} = 2$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EBF}, \overset{\Delta}{CDJ}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{x}{2} = \frac{7}{4}$
Resolent l’equació:
$x = \frac{7}{2}$

3543.- En la figura, calculeu l'àrea infinita ombrejada.



Solució:

Siga el primer octant ombrejat de centre A i radi $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$

Els infinits octants són homotètics, el centre d'homotècia és O intersecció de les rectes AA', BB'.

Calculem la raó d'homotècia.

Siga $\overline{A'B'} = r$ radi del segon octant.

$\angle A'B'A = 45°$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AA'B'}$

$$\frac{r}{\sin 30°} = \frac{1}{\sin 45°}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Les àrees dels octants formen una progressió geomètrica de raó

$$r^2 = \frac{1}{2}$$

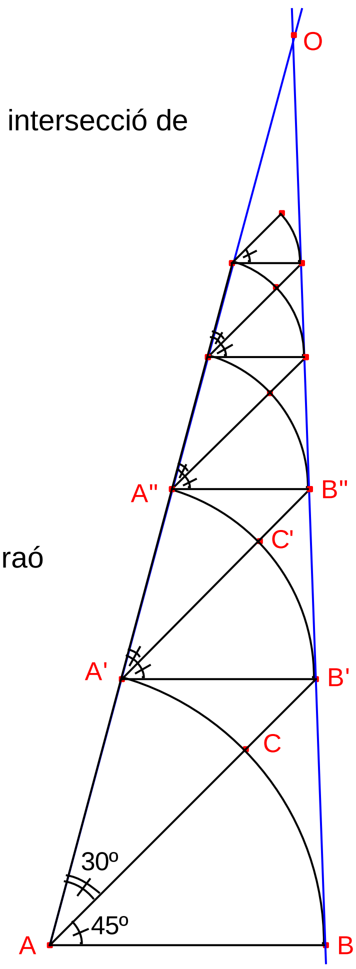
$$0 < r^2 = \frac{1}{2} < 1$$

L'àrea del primer octant de radi 1 és:

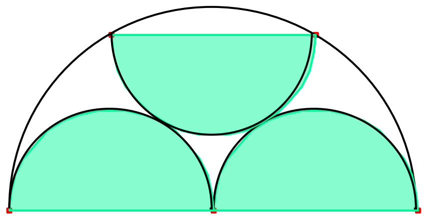
$$S_1 = \frac{\pi}{8}$$

L'àrea de les infinites àrees és:

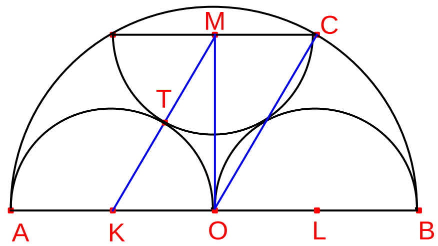
$$S_\infty = \frac{S_1}{1 - r^2} = \frac{\frac{\pi}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$$



3544.- En una semicircumferència s'han inscrit tres semicircumferències.
Les dues inferior són iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del semicercle exterior.



Solució:
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga el semicercle de centre K i radi $\overline{KO} = \frac{R}{2}$
Siga el semicercle de centre L i radi $\overline{LO} = \frac{R}{2}$
Siga el semicercle de centre M i radi $\overline{MC} = \overline{MT} = r$



Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{KOM}, \overset{\Delta}{OMC}$:

$$\left(\frac{R}{2}+r\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = R^2 - r^2$$

Simplificant:

$$2r^2 - Rs - R^2 = 0$$

Resolent l'equació:

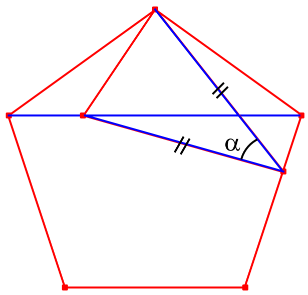
$$r = \frac{R}{2}$$

Les tres semicircumferències interiors són iguals.

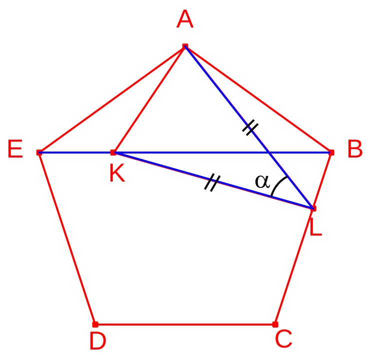
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_R} = \frac{3 \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2}{R^2} = \frac{3}{4}$$

3545.- La figura està formada per un pentàgon regular i una diagonal.
Calculeu la mesura de l'angle α

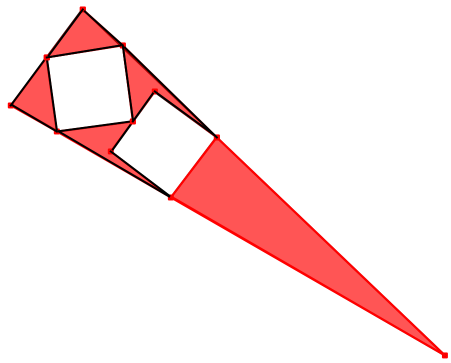


Solució:
Siga el pentàgon regular $ABCDE$.
Siga $\overline{AL} = \overline{KL} = a, \overline{BL} = b$
Siga $\beta = \angle EAK$

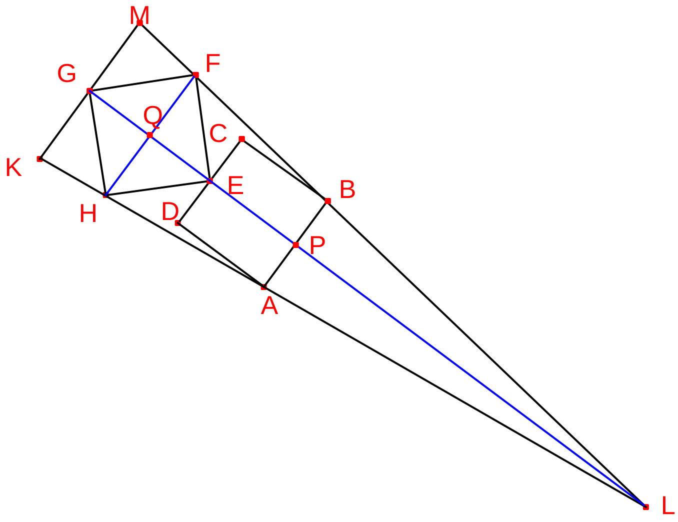


$\angle KAL = \angle AKL = 90° - \frac{\alpha}{2}$
$\angle AKB = 36° + \beta$
$\angle BKL = 54° - \beta - \frac{\alpha}{2}$
$\angle LAB = 18° - \beta + \frac{\alpha}{2}$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ALB}$:
$$\frac{a}{\sin 108°} = \frac{b}{\sin\left(18° - \beta + \frac{\alpha}{2}\right)}$$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{KLB}$:
$$\frac{a}{\sin 72°} = \frac{b}{\sin\left(54° - \beta - \frac{\alpha}{2}\right)}$$
Dividint ambdues expressions:
$$1 = \frac{\sin\left(54° - \beta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(18° - \beta + \frac{\alpha}{2}\right)}$$
$$54° - \beta - \frac{\alpha}{2} = 18° - \beta + \frac{\alpha}{2}$$
Simplificant:
$\alpha = 36°$

3546.- Els dos quadrats de la figura són iguals i d'àrea 4.
El triangle exterior és isòsceles.
Calculeu l'àrea ombrejada.



Solució:
Siguen els quadrats iguals $ABCD, EFGH$ de costat $\overline{AB} = 2$
Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga Q el punt mig de $\overline{HF}$
Siga $\overline{LP} = x$
$\overline{QE} = \overline{QH} = \sqrt{2}, \overline{LQ} = 2 + \sqrt{2} + x$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APL}, \overset{\Delta}{HQL}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}+x} = \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{2}-1}{2+\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 4 + 3\sqrt{2}$$

Siga $\overline{KG} = y$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APL}, \overset{\Delta}{KGL}$ són semblants.

$$\frac{y}{2\sqrt{2}+2+4+3\sqrt{2}} = \frac{1}{4+3\sqrt{2}}$$

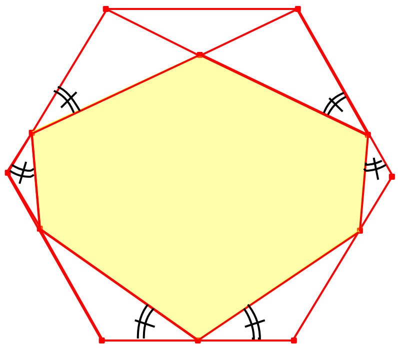
$$y = \frac{6+5\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}$$

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ menys la suma de les àrees dels dos quadrats:

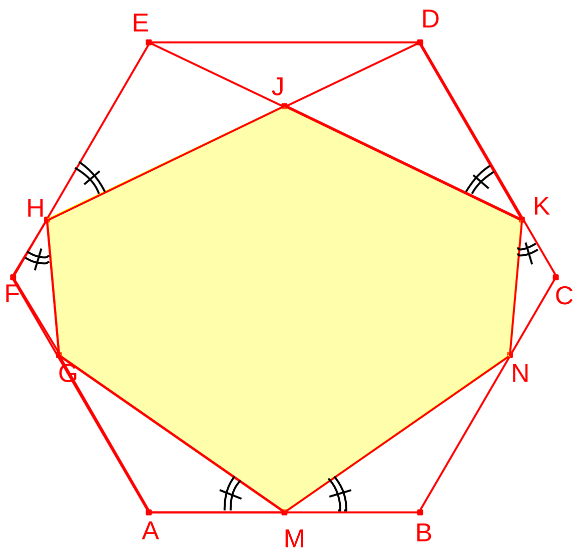
$$S_{ombrejada} = \left(3-\sqrt{2}\right)\left(6+5\sqrt{2}\right) - 2 \cdot 4 = 9\sqrt{2}$$

3547.- La figura està formada per un hexàgon regular i un hexàgon interior

Calculeu la proporció entre l'hexàgon ombrejat i l'hexàgon regular



Solució:



AB=2   AG=x   FG=2-x

AMG, HFG semblants:

FH=(2-x)/x

HE=(3x-2)/x

AMG, EHD semblants:

(3x-2)/x=2/x

x=4/3

AF=4/3, FG=2/3, FH=1/2, EH=3/2

Teorema cosinus AMB

MG=sqrt(37)/3

a=angleAMG

sin a=2·sqrt(3)/sqrt(37)

[AMG]=sqrt(3)/3

[FGH]=sqrt(3)/12

[EDF]=3·sqrt(3)/4

[KDJ]=21·sqrt(3)/44

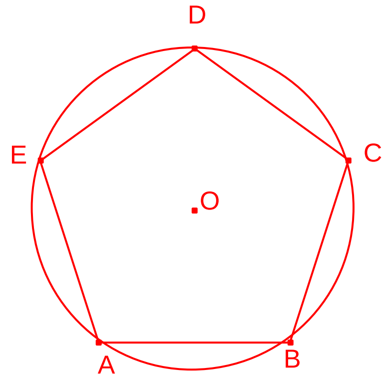
[MNKJHG]=130·sqrt(3)/33

[ABCDEF]=6·sqrt(3)

[MNKJHG]/[ABCDEF]=65/99

3548.- Donat un pentàgon regular i la seua circumferència circumscrita, la suma del quadrat de la diagonal més el quadrat del costat és igual a cinc vegades el quadrat del radi.

Teorema d'Aristeu el Vell. Crotona 370Ac-300AC
"Història de la Matemàtica: Grècia IIIa. Pla i Carrera, Josep.



Solució:
Siga $\overline{OA} = R$, radi de la circumferència circumscrita al pentàgon regular $ABCDE$
La recta OD talla la circumferència circumscrita en el punt G.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AD}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 = (1+\Phi^2)\cdot\overline{AB}^2$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABD}, \overset{\Delta}{AGO}$ són semblants (triangles auris).

$$\frac{R}{\overline{AG}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$R^2 = \Phi^2\cdot\overline{AG}^2$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GAD}$:

$$\overline{AG}^2 = 4R^2 - \overline{AD}^2$$

$$R^2 = \Phi^2\cdot(4R^2 - \overline{AD}^2)$$

$$R^2 = \frac{\Phi^4}{4\Phi^2-1}\overline{AB}^2$$

$$5\cdot R^2 = \frac{5\cdot\Phi^4}{4\Phi^2-1}\overline{AB}^2$$

Provem que,

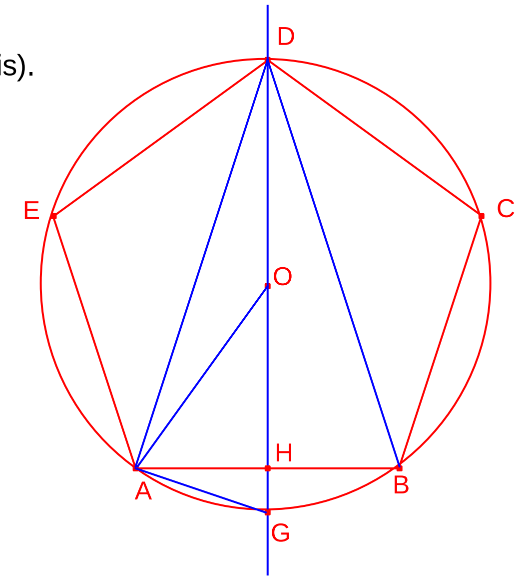
$$1+\Phi^2 = \frac{5\cdot\Phi^4}{4\Phi^2-1}$$

$$(1+\Phi^2)(4\Phi^2-1) = 5\cdot\Phi^4$$

$$\Phi^4 = 3\Phi^2 - 1$$

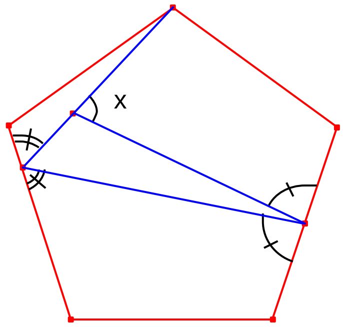
$$(1+\Phi)^2 = 3\Phi + 2$$

Aquesta darrera igualtat és certa.

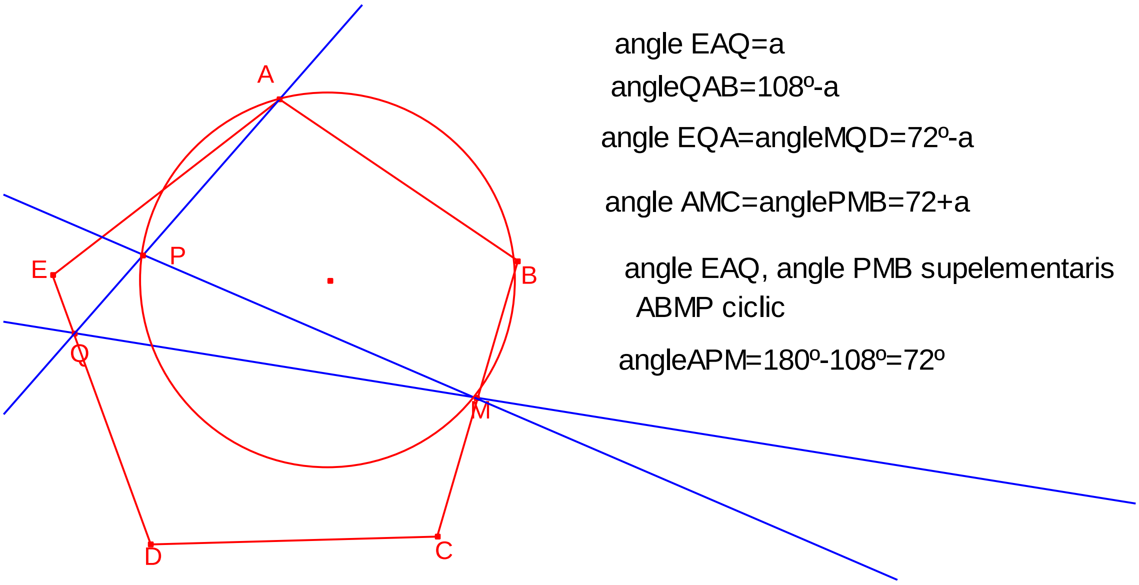


Solució 2: Demostració D'Aristeu.
Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de centre O.
Siga la diagonal $\overline{AD}$
La recta OD dimidia $\overline{AB}$ i l'arc que el sosté en el punt G.
$\overline{AG}$ és el costat del decàgon regular inscrit en la circumferència.
El quadrat de $\overline{AG}$ equival a quatre vegades del quadrat del radi $\overline{OG}$.
Per tant el quadrat de $\overline{AD}$ més el quadrat de $\overline{AG}$ equival a quatre vegades del quadrat del radi $\overline{OG}$.
Aleshores la suma dels quadrats de $\overline{AD}, \overline{CG}, \bar{A}$equival a cinc vegades el quadrat del radi $\overline{OG}$
La suma del quadrat del costat de l'hexàgon regular i del quadrat del decàgon regular $\overline{OA}$ i $\overline{AG}$ equival al quadrat del costat del pentàgon regular $\overline{AB}$
En definitiva, els quadrats de $\overline{AD}$ i $\overline{AB}$ equival a cinc vergades el quadrat del radi $\overline{OG}$.

3549.- En el pentàgon regular de la figura, calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



angle EAQ=a

angleQAB=108º-a

angle EQA=angleMQD=72º-a

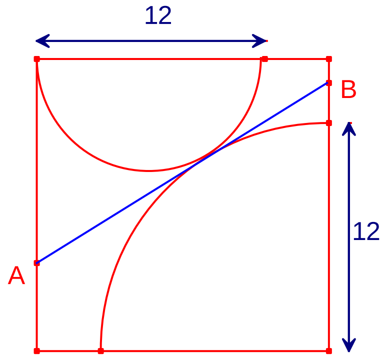
angle AMC=anglePMB=72+a

angle EAQ, angle PMB supelementaris

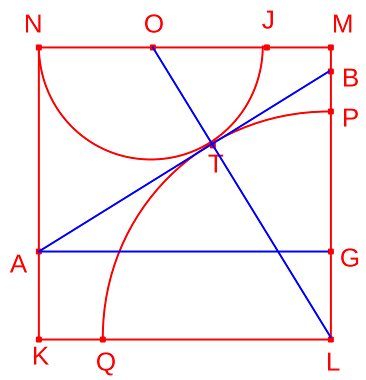
ABMP ciclic

angleAPM=180º-108º=72º

3550.- La figura està formada per un quadrant i un semicercle dins d'un quadrat.
Calculeu l'àrea del quadrat i la mesura del segment $\overline{AB}$



Solució:
Siga el quadrat $KLMN$.
$\overline{KQ} = \overline{PM} = \overline{MJ} = a$
Siga $\overline{BT} = y$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LMO}$:
$18^2 = (6+a)^2 + (12+a)^2$
Resolent l'equació:
$a = 3\left(-3+\sqrt{17}\right)$
$S_{ABCD} = (12+a)^2 = 18\left(9+\sqrt{17}\right)$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{LMO}, \overset{\Delta}{LTB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{y}{12} = \frac{6+a}{12+a} = \frac{9-\sqrt{17}}{8}$$
$$y = \frac{3}{2}\left(9-\sqrt{17}\right)$$

Siga G la projecció de A sobre $\overline{LM}$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{LMO}, \overset{\Delta}{LTB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{AB}}{\sqrt{114+y^2}} = \frac{12+a}{12}$$
$\overline{AB} = 18$