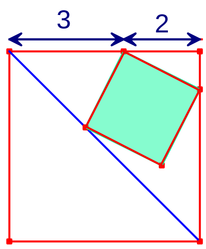
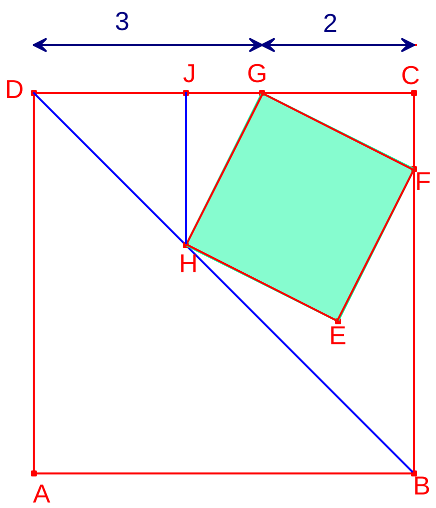
3551.- Dins d'un quadrat s'ha dibuixat un quadrat que té un vèrtex en la diagonal del quadrat exterior.
Calculeu l'àrea del quadrat ombrejat.



Solució:



GCF, HJG iguals

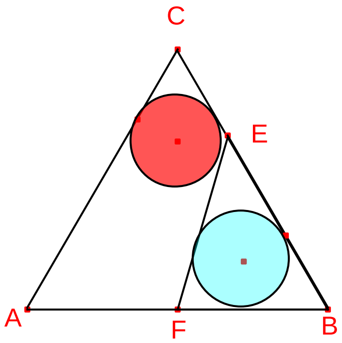
HJ=2=DJ

JG=1

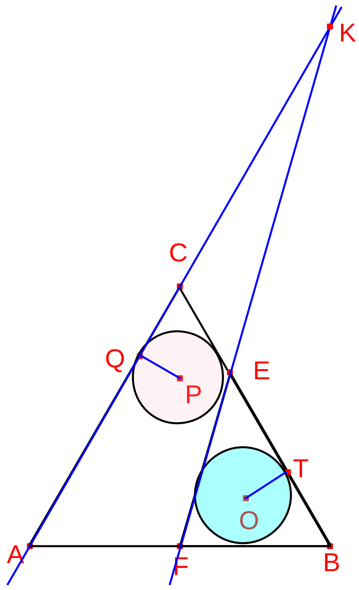
teorema Pitàgores HJG

[EFGH]=5

3552.- Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siguen els punts E, F dels costats $\overline{BC}, \overline{AB}$, respectivament tal que $\overline{BE} = 2 \cdot \overline{CE}$, $\overline{AF} = \overline{BF}$
Calculeu la proporció entre les àrees de la circumferència roja i blava.



Solució:
Siga $\overline{AB} = 6k, \overline{BE} = 2k, \cdot \overline{CE} = 4k, \overline{AF} = \overline{BF} = 3k$



La circumferència blava està inscrita al triangle $\overset{\Delta}{FBE}$
Siga $\overline{OT} = r$, el radi

La circumferència roja està exinscrita al triangle $\overset{\Delta}{CEK}$
Siga $\overline{PQ} = s$, el radi.

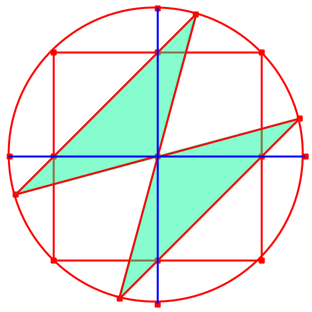
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{FBE}$:
$\overline{FE} = k\sqrt{13}$
Siga $\alpha = \angle FEB$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{FBE}$:
$$\frac{3k}{\sin\alpha} = \frac{k\sqrt{13}}{\sin 60°}$$
$$\sin\alpha = \frac{3\sqrt{39}}{26}, \cos\alpha = \frac{5\sqrt{13}}{26}$$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{CEK}$:
$$\frac{\overline{CK}}{\sin\alpha} = \frac{2k}{\sin(120° + \alpha)}$$
$\overline{CK} = 6k$

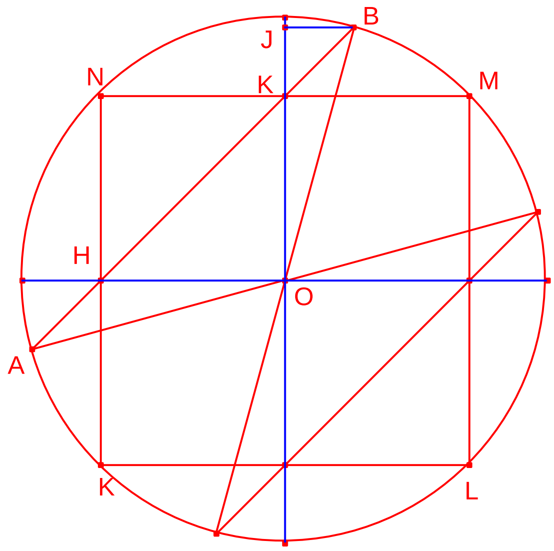
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CEK}$:
$\overline{KE} = 2k\sqrt{13}$

Calculem el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{FBE}$ a partir de la seua àrea:
$$\frac{1}{2} \cdot 3k \cdot 4k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3k + 4k + k\sqrt{13}}{2} r$$
$$r = \frac{7\sqrt{3} - \sqrt{39}}{6} k$$
Calculem el radi de la circumferència exinscrita al triangle $\overset{\Delta}{CEK}$ a partir de la seua àrea:
$$\frac{1}{2} \cdot 6k \cdot 2k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6k + 2k\sqrt{13} - 2k}{2} s$$
$$s = \frac{\sqrt{39} - 2\sqrt{3}}{3} k$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{roja}}{S_{blava}} = \left(\frac{s}{r}\right)^2 = \left(\frac{-1 + 5\sqrt{13}}{18}\right)^2 = \frac{163 - 5\sqrt{13}}{162} \approx 0.8949$$

3553.- Donat un quadrat inscrit en una circumferència de radi 1, calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:



OB=1

JK=JB=a

Teorema Pitàgores OJB

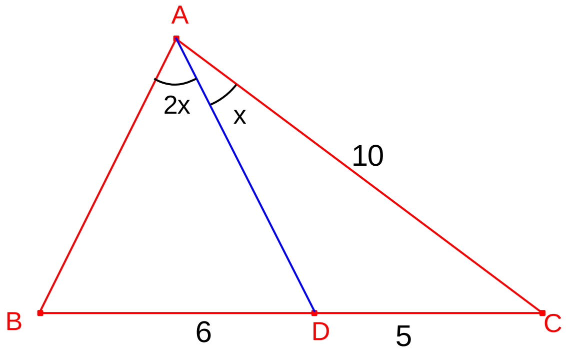
$1=a^2+(\mathrm{sqrt}(2)/2+a)^2$

a=(sqrt(6)-sqrt(2))/4

OK=sqrt(2)/2

2·[AOB]=2·([HOK]+2[OKB])=sqrt(3)/2

3554.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, b = 10, a = 11$
Siga D un punt del costat $\overline{BC}$ tal que
$\overline{BD} = 6, \overline{CD} = 5, \angle BAD = 2 \cdot \angle DAC$
Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



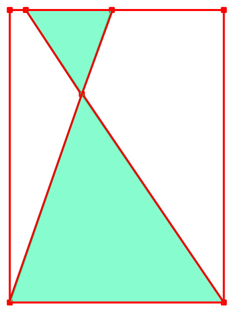
Solució:

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ADC}$:
$$\frac{5}{\sin x} = \frac{\overline{AD}}{\sin C}$$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ADC}$:
$$\frac{6}{\sin 2x} = \frac{\overline{AD}}{\sin B}$$
Dividint ambdues expressions:
$$\frac{5 \cdot 2\cos x}{6} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{10}{c}$$
$$\cos x = \frac{6}{c}$$

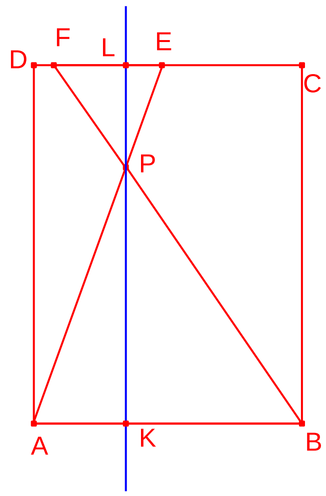
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$$121 = 100 + c^2 - 20c \cdot \cos 3x$$
$$\cos 3x = 4 \cdot \cos^3 x - 3 \cdot \cos x$$

$$21 = c^2 - 20\big(6(4 \cdot \cos^2 x - 3)\big)$$
$$-339 = c^2 - 480 \cdot \cos^2 x$$
$$-339 = c^2 - 480 \cdot \frac{36}{c^2}$$
Resolent l'equació:
$$c = 3\sqrt{5}$$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$$45 = 100 + 121 - 2 \cdot 10 \cdot 11 \cdot \cos C$$
$$\cos C = \frac{4}{5}, \sin C = \frac{3}{5}$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 \cdot \frac{3}{5} = 33$$

3555.- Un rectangle té dos segments que es creuen.
Calculeu la fracció mínima entre l'àrea ombrejada i l'àrea del rectangle.

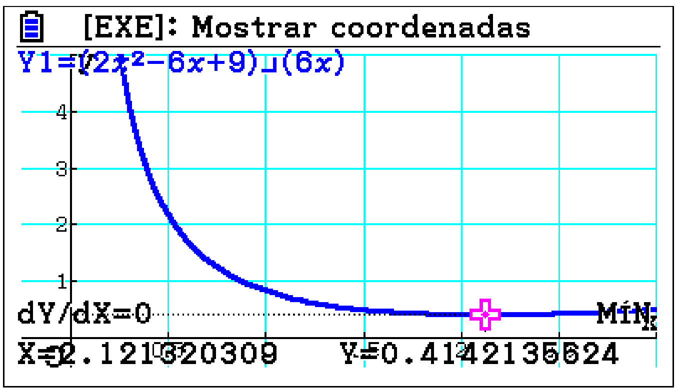


Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b$
Siga $c = \overline{FE}$
Els triangles $\overset{\Delta}{ABP}, \overset{\Delta}{EFP}$ són semblants.
Siga $h = \overline{AK}$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$

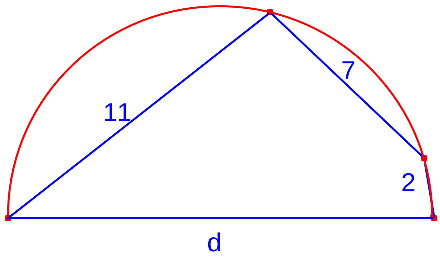


Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{c}{a} = \frac{b-h}{h}$$
$$c = \frac{a(b-h)}{h}$$
La proporció d'àrees és:
$$P(h) = \frac{\frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}\frac{a(b-h)}{h}(b-h)}{ab}$$
$$P(h) = \frac{2h^2 - 2bh + b^2}{2bh}, \qquad h \in [0, b]$$
$$P'(h) = \frac{2h^2 - b^2}{2bh^2}$$
$$P'(h) = 0$$
Resolent l'equació:
$$h = \frac{\sqrt{2}}{3}b$$
$$P"(h) = \frac{b}{h^3}$$
$$P"\left(\frac{\sqrt{2}}{3}b\right) > 0$$
El mínim s'assoleix quan $h = \frac{\sqrt{2}}{3}b$
La proporció mínim és:
$$P\left(\frac{\sqrt{2}}{3}b\right) = \sqrt{2} - 1$$

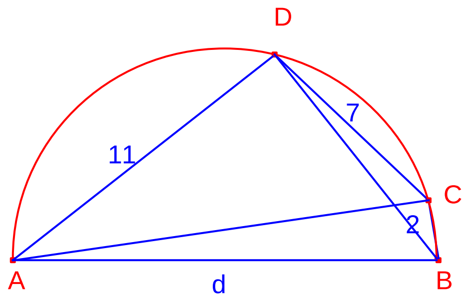
Gràfica per a $a = 1, b = 3$



3556.- En la figura determineu el diàmetre de la semicircumferència.



Solució:



El quadrilàter $ABCD$ éstà inscrit en una circumferència.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADB}$:

$\overline{BD} = \sqrt{d^2 - 121}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACB}$:

$\overline{AD} = \sqrt{d^2 - 4}$

Aplicant el teorema de Tolomeu al quadrilàter $ABCD$:

$7d + 22 = \sqrt{d^2 - 121} \cdot \sqrt{d^2 - 121}$

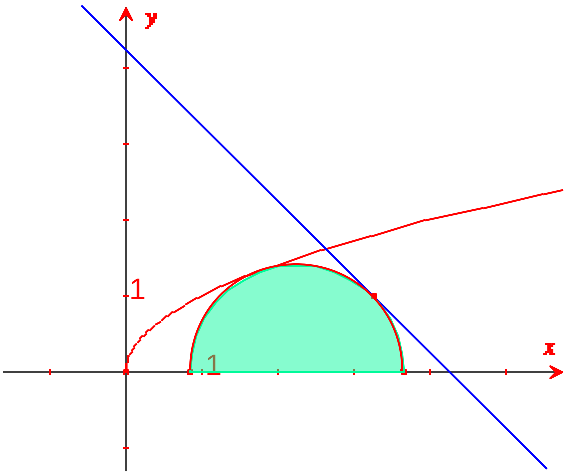
Elevant al quadrat i simplificant:

$d^3 - 174d - 308 = 0$

Resolent l'equació:

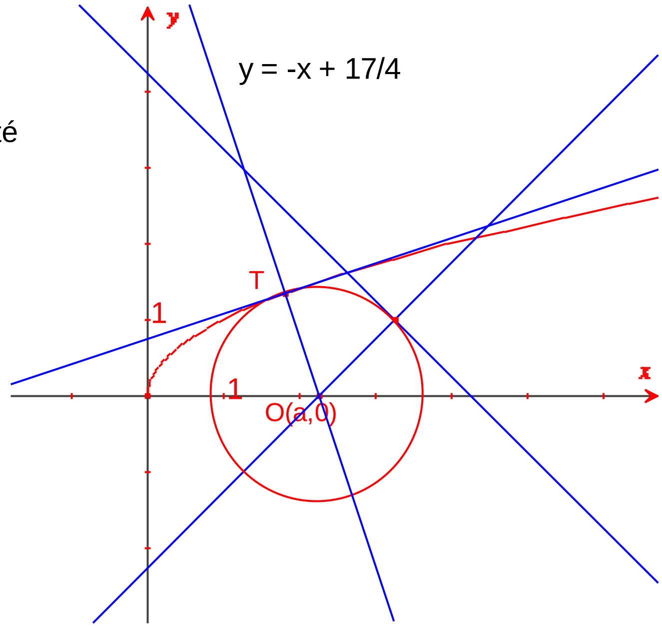
$d = 14$

3557.- Una semicircumferència de la figura, és tangent a la paràbola $y = \sqrt{x}$ i a la recta $4x + 4y = 17$
Calculeu l'àrea del semicercle.

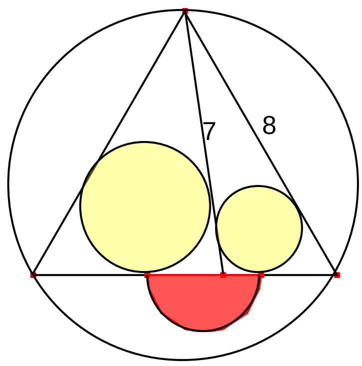


Solució:
Siga $O(a, 0)$ el centre del semicercle.
El radi és
$r = d(O, 4x + +4y = 17) = \left|\frac{4a-17}{4\sqrt{2}}\right|$
Siga $T(b, \sqrt{b})$ punt de tangència.
$d(O, T) = r$
La recta tangent a la paràbola en el punt T té equació:
$r_T \equiv x - 2\sqrt{b}y + b = 0$
$d(O, r_T) = r$

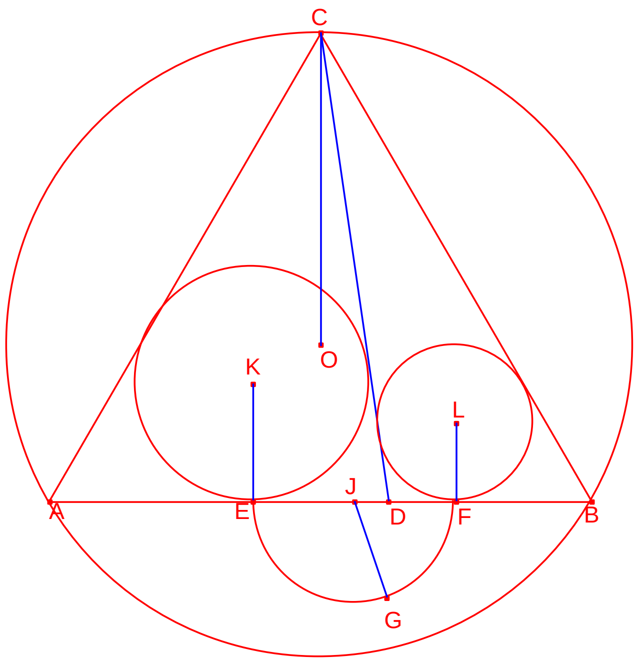
$$(b-a)^2 + b = \left(\frac{4a-17}{4\sqrt{2}}\right)^2$$
$$\frac{(a+b)^2}{1+4b} = \left(\frac{4a-17}{4\sqrt{2}}\right)^2$$
Resolent el sistema:
$$a = \frac{9}{4}$$
$$r = \sqrt{2}$$
L'àrea del semicercle és:
$$S = \frac{1}{2}\pi r^2 = \pi$$



3558.- Una circumferència té inscrit un triangle equilàter de costat 8.
Un segment que mesura 7 divideix el triangle equilàter en dos triangles en les que s'ha inscrit en cadascun una circumferència. S'ha dibuixat una semicircumferència de diàmetre els punts de tangència de les dues circumferències i el costat inferior
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle circumscrit al triangle equilàter.



Solució:



AB=8, CD=7

KE=r, LF=s, JG=t

OC=R=(8/3)sqrt(3)

teorema cosinus ADC

AD=5, BD=3

[ADC]=(8·5·sin(60º)=(8+5+7)r/2

r=sqrt(3)

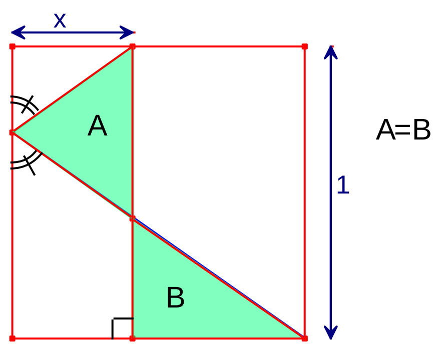
s=(2/3)sqrt(3)

DE=(5+7-8)/2=2

DF=(3+7-8)/2=1

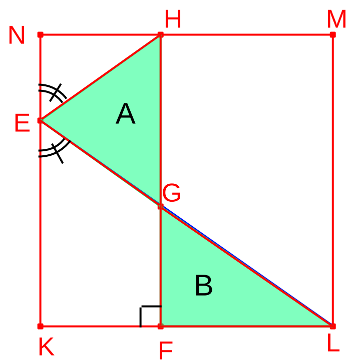
Proporció=($r^2+s^2-t^2/2$)/R^2=131/512

3559.- En un quadrat de costat 1, els triangles ombrejats tenen la mateixa àrea.
Calculeu la mesura del segment x.



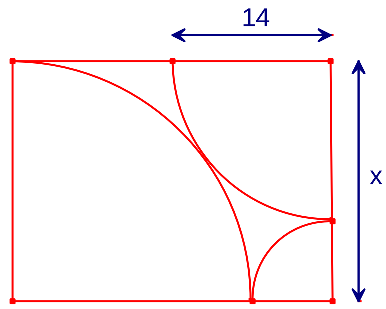
Solució:
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = 1$
Siga $\overline{GH} = a, \overline{KE} = b$
$\overline{GF} = 1 - a, \overline{FL} = 1 - x$

Les àrees dels triangles $E\overset{\Delta}{G}H, F\overset{\Delta}{L}G$ són iguals:
$ax = (1 - a)(1 - x)$
Simplificant:
$1 - a = x$

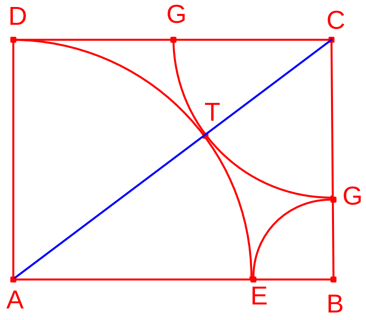


Els triangles rectangles $E\overset{\Delta}{K}L, G\overset{\Delta}{F}L, E\overset{\Delta}{N}H$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{b}{1} = \frac{x}{1 - x} = \frac{1 - b}{x}$$
$$\frac{x}{1 - x} = \frac{1}{x + 1}$$
$$x^2 + 2x - 1 = 0$$
$$x = \sqrt{2} - 1$$

3560.- En un rectangle s’han dibuixat tres quadrants tangents dos a dos un d’ells de radi 14.
Calculeu la mesura del costat x



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$, $\overline{AD} = \overline{BC} = x$
$\overline{AC} = x + 14$
$\overline{BE} = \overline{BG} = x - 14.$
$\overline{AB} = 2x - 14$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$(x + 14)^2 = (2x - 14)^2 + x^2$
Simplificant:
$x^2 - 21x = 0$
Resolent l’equació:
$x = 21$