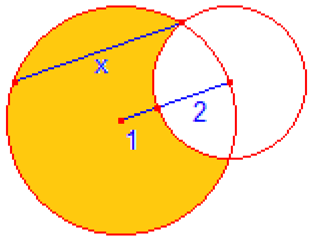
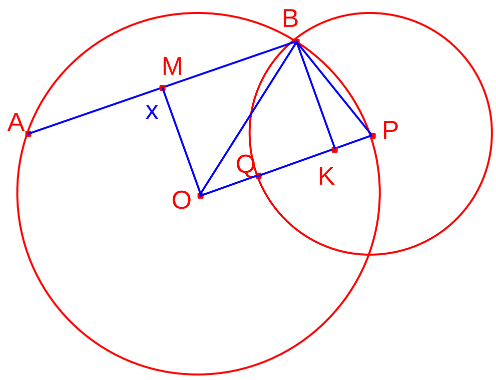
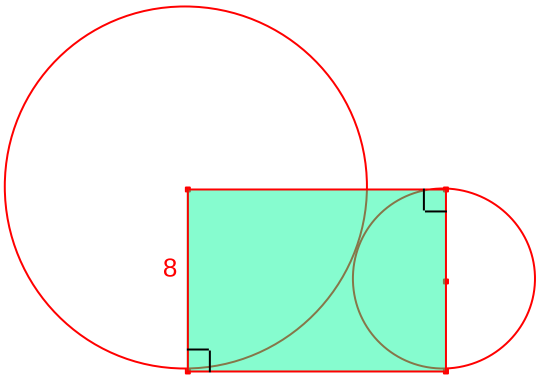
3561.- En la figura, els dos segments són paral·lels. Calculeu la mesura del segments x.



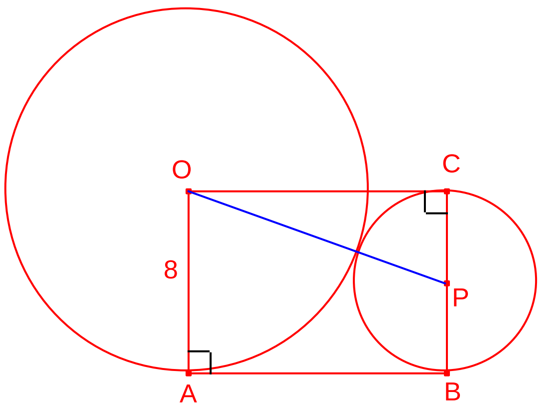
Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OP} = \overline{OB} = 3$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PQ} = \overline{PB} = 2$
Siga M el punt mig de la corda $\overline{AB} = x$
Siga K la projecció de B sobre $\overline{OP}$.
$\overline{OK} = \overline{MB} = \frac{x}{2}, \overline{PK} = 3 - \frac{x}{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{OKB}, \overset{\Delta}{PKB}$:
$4 - \left(3 - \frac{x}{2}\right)^2 = 9 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$
Simplificant:
$3x = 14$
Resolent l'equació:
$x = \frac{14}{3}$



3562.- La figura està formada per dues circumferències tangents una de radi 8. Calculeu l'àrea ombrejada.



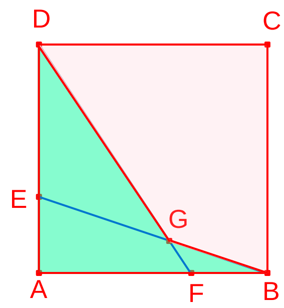
Solució:



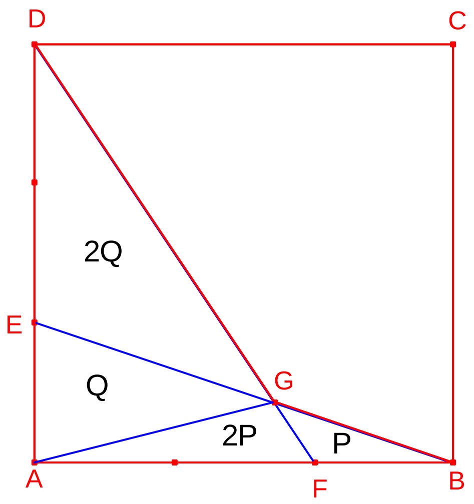
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = 8$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PC} = 4$
El quadrilàter $ABCO$ és un rectangle.
Siga $\overline{OC} = x$
$\overline{OP} = 12$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OCP}$:
$144 = 16 + x^2$
Resolent l'equació:
$x = 8\sqrt{2}$
L'àrea del rectangle $ABCO$ és:
$S_{ABCO} = 64\sqrt{2}$

3563.- Siga el quadrat $ABCD$.
Siguen els punts E, F dels costats $\overline{AD}, \overline{AB}$ respectivament tal que:
$\overline{AE} = \overline{BF} = \frac{1}{3}\overline{AB}$
Calculeu la proporció d'àrees entre els quadrilàters $ABGD$ i $BCDG$



Solució:



[FBG]=P, [EAG]=Q
[ABCD]=S

[AFD]=2·[EAB]
3Q+2P=2(Q+3P)
Q=4P

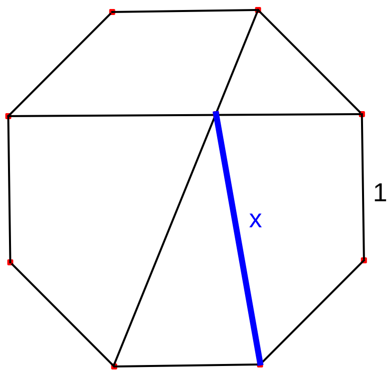
[ABE]=(1/6)[ABCD]=S/6
S=42P

[ABGD]=15P

[BCDG]=S-[ABGD]
[BCDG]=27P

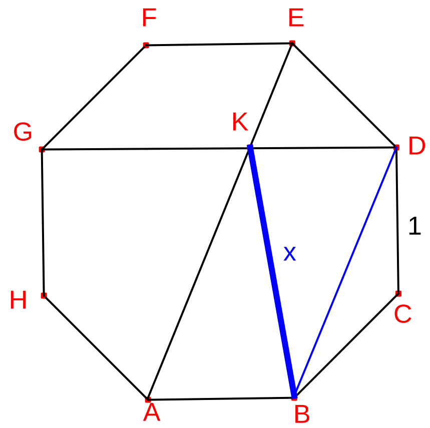
[ABGD]/[BCDG]=5/9

3564.- En un octògon regular de costat 1 s'han dibuixat dues diagonals.
Calculeu la mesura del segment x

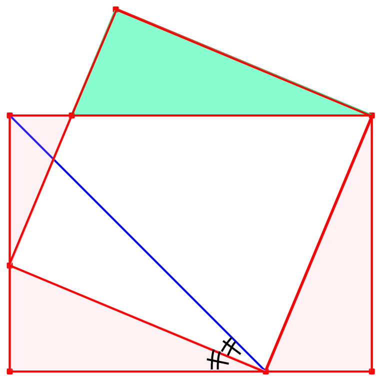


Solució:
Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$
Siga K la intersecció de les diagonals $\overline{GD}, \overline{AE}$
Siga $\overline{BK} = x$

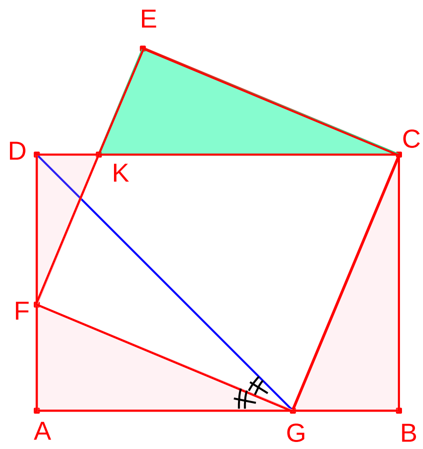
La diagonal $\overline{BD}$ és paral·lela a la diagonal $\overline{BD}$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$:
$\overline{BD} = \overline{AK} = 2 + \sqrt{2}$
$\angle KAB = \frac{1}{2} 135°$
$\cos \frac{1}{2} 135° = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABK}$:
$x^2 = 1 + 2 + \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$
$x^2 = 3$
$x = \sqrt{3}$



3565.- La figura està formada per un rectangle i un quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea rosa i l'àrea blava.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrat $CEFG$



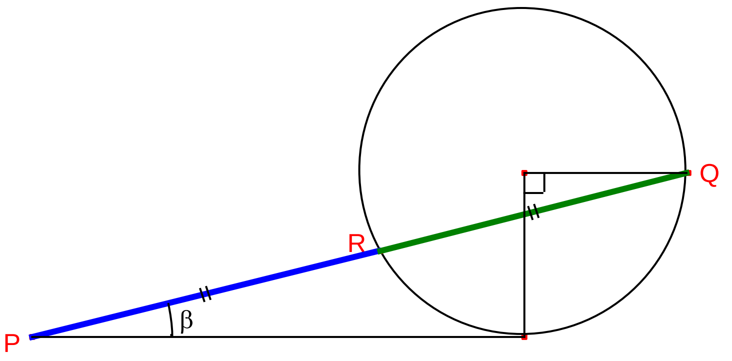
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{GBC}, \overset{\Delta}{FAG}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{AG} = 1$
Siga $\overline{BG} = \overline{AF} = x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GBC}$
$\overline{CG} = \sqrt{1 + x^2}$
$\overline{DF} = 1 - x$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AGD}$
$\overline{DG} = \sqrt{2}$

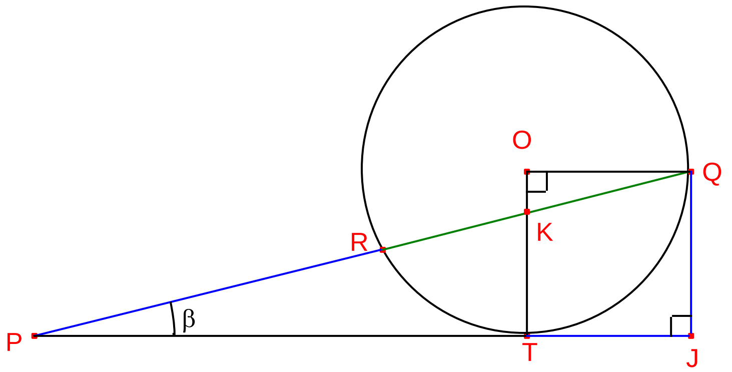
Aplicant el teorema de la bisectriu al triangle $\overset{\Delta}{AGD}$
$$\frac{x}{1} = \frac{1 - x}{\sqrt{2}}$$
Resolent l'equació:
$x = \sqrt{2} - 1$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{GBC}, \overset{\Delta}{KEC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$S_{KEC} = (1 - x)^2 S_{GBC}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{GBC}, \overset{\Delta}{KDF}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$S_{KDF} = (1 + x^2) S_{GBC}$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{rosa}}{S_{blava}} = \frac{2 \cdot S_{GBC} + S_{KDF}}{S_{KEC}} = \frac{2 + (1 - x)^2}{1 + x^2} = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} = 2$$

3566.- En la figura, $\overline{PR} = \overline{QR}$
Calculeu la mesura de l'angle β



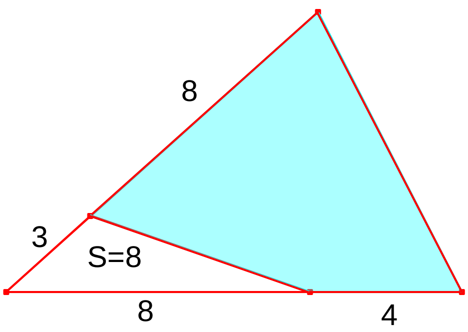
Solució:



Siga $\overline{OT} = \overline{OQ} = 1$, radi de la circumferència tangent a $\overline{PT}$
Siga $\overline{PR} = \overline{QR} = c$
Siga $\overline{PT} = a$
Aplicant la potència del punt P respecte de la circumferència:
$c \cdot 2c = a^2$
$c^2 = \dfrac{1}{2}a^2$

Siga J la projecció de Q sobre la recta PT
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PJQ}$:
$4c^2 = 1 + (a+1)^2$
$2a^2 = 1 + a^2 + 2a + 1$
$a^2 - 2a - 2 = 0$
Resolent l'equació:
$a = 2$
$\overline{PJ} = 3$
$\tan\beta = \dfrac{1}{3}$

3567.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del triangle exterior.
L'àrea del triangle menut és 8.

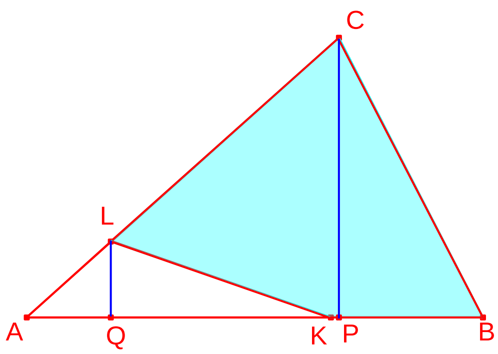


Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = 12, \overline{AC} = 11$

Siga el triangle $\overset{\Delta}{AKL}$ d'àrea 8, $\overline{AK} = 8, \overline{AL} = 3$

Siga P la projecció de C sobre $\overline{AB}$
Siga Q la projecció de L sobre $\overline{AB}$



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AKL}$ és 8 aleshores:
$\overline{LQ} = 2$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APC}, \overset{\Delta}{AQL}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PC}}{11} = \frac{2}{3}$$

$$\overline{PC} = \frac{22}{3}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{22}{3} = 44$$

L'àrea del quadrilàter ombrejat $KBCL$ és:

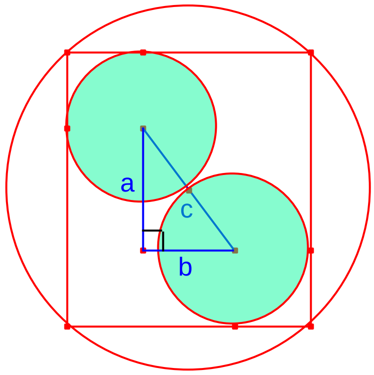
$$S_{KBCL} = S_{ABC} - S_{AKL} = 44 - 8 = 36$$

La proporció d'àrees és:

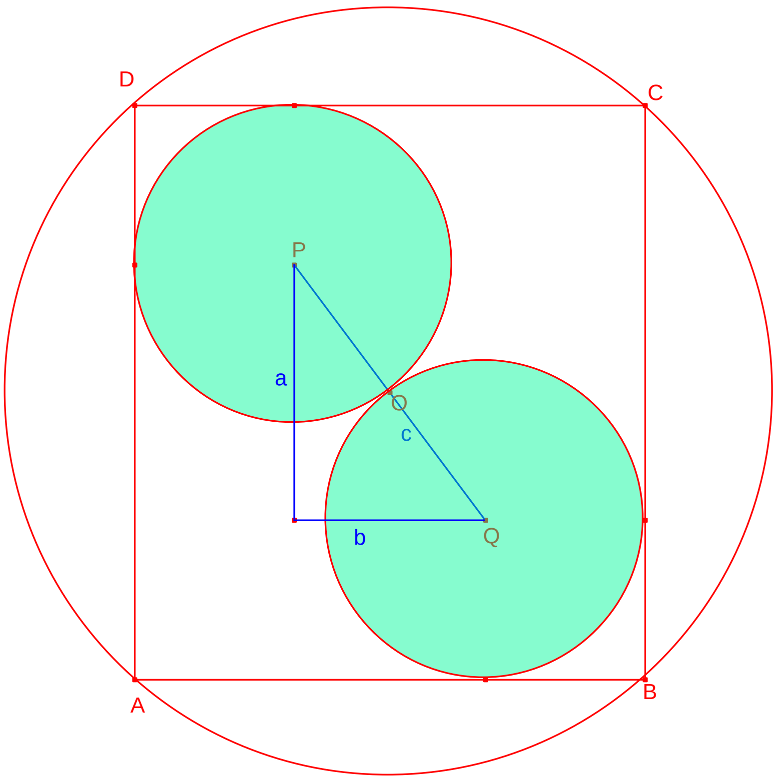
$$\frac{S_{KBCL}}{S_{ABC}} = \frac{36}{44} = \frac{9}{11}$$

3568.- En la figura els dos cercles ombrejats són iguals. Calculeu la proporció de l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle exterior si:

a) $(a, b, c) = (4, 3, 5)$
b) general



Solució:



PO=r. c=2r

OB=R

AB=2r+b, AD=2r+a

Teorema Pitàgores ABD

$4R^2=12r^2+4r(a+b)$

$R^2=(3/4)c^2+(1/2)c(a+b)$

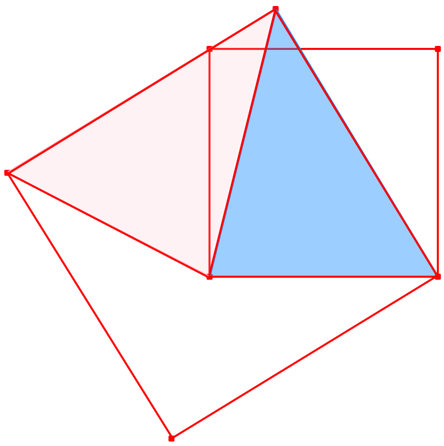
Proporció:

$2r^2/R^2=2c/(3c+2(a+b))$

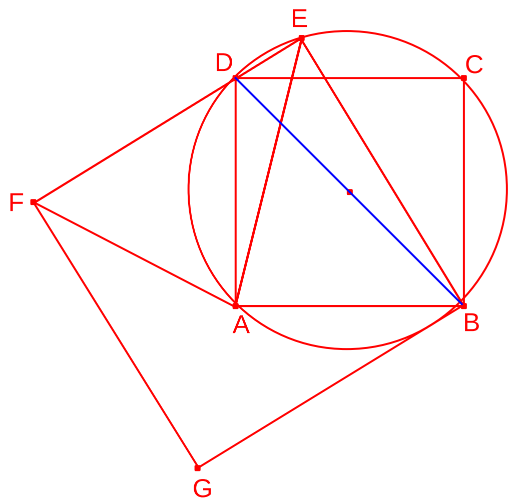
Si a=4, b=3, c=5

P=10/29

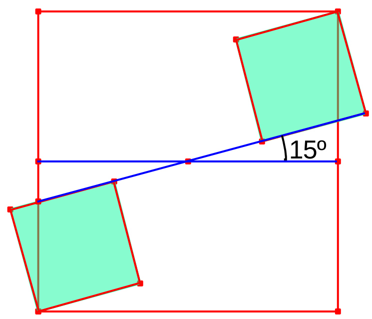
3569.- La figura està formada per dos quadrats.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos triangles ombrejats.



Solució:
Siguen els quadrats $ABCD, BEFG$.
$\angle BCD = \angle DEB = 90°$
Aleshores, el quadrilàter $BCED$ és inscriptible.
El pentàgon $ABCED$ és inscriptible.
$\angle AED = \angle ADE = 45°$
$\angle FAE = 90° - 45° = 45° = \angle AED$
Els triangles $\overset{\Delta}{AEB}, \overset{\Delta}{AEF}$ són iguals (CAC)
Aleshores la proporció entre les àrees és 1



3570.- Calculeu la proporció entre la suma de les àrees del quadrats ombrejats i l'àrea del quadrat gran.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre O i costat $\overline{AB} = 2$
Siga el quadrat $CEFG$ de costat $\overline{CE} = c$
Siga $\overline{KM} = x$
$\tan 15° = x = 2 - \sqrt{3}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OMK}, \overset{\Delta}{CEK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$x = \frac{\sqrt{(1-x)^2 - c^2}}{c}$$

$$c^2 = \frac{1 - 2x + x^2}{1 + x^2} = \frac{1}{2}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{2c^2}{4} = \frac{1}{4}$$