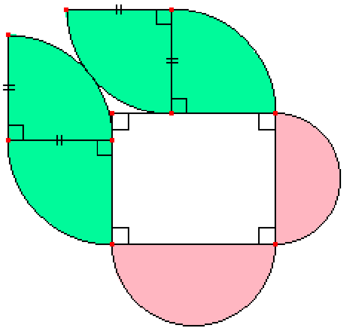
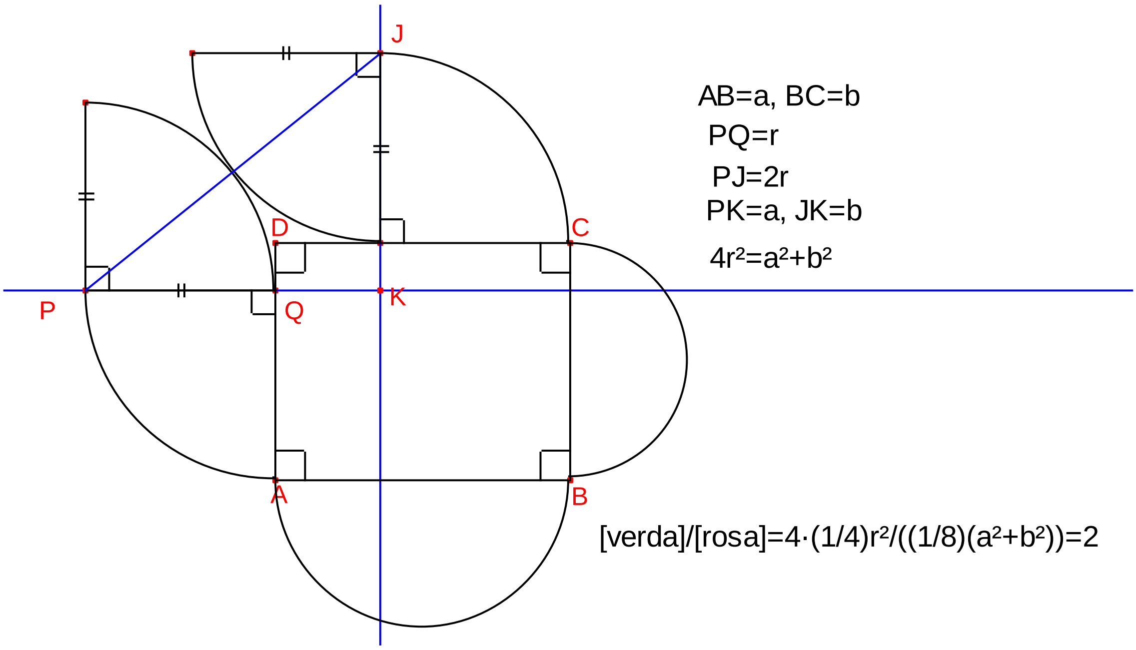
3571.- Sobre dos costats d'un rectangle s'han dibuixat dos cercle.
S'han dibuixat quatre quadrant iguals.
Calculeu la proporció de la suma de les àrees dels quatre quadrants (verda) i la suma de les àrees dels dos semicercles.



Solució:



AB=a, BC=b

PQ=r

PJ=2r

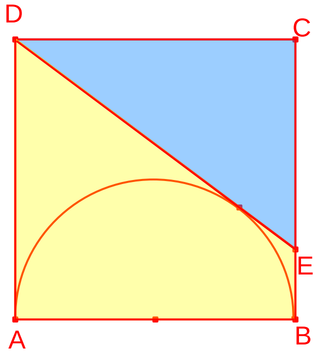
PK=a, JK=b

$4r^2=a^2+b^2$

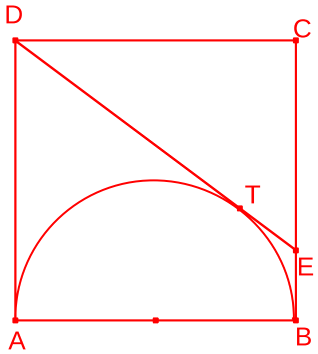
$[verda]/[rosa]=4\cdot(1/4)r^2/((1/8)(a^2+b^2))=2$

3572.- Sobre un costat del quadrat $ABCD$ s'ha dibuixat un semicircumferència.

Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CDE}$ i l'àrea del quadrilàter $ABED$



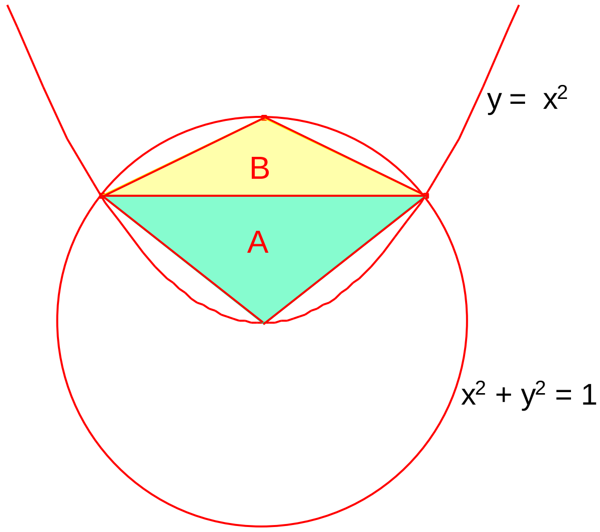
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga T el punt de tangència de la recta DE i la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}$
Siga $\overline{BE} = \overline{TE} = x$
$\overline{DA} = \overline{DT} = c$
$\overline{CE} = c - x$



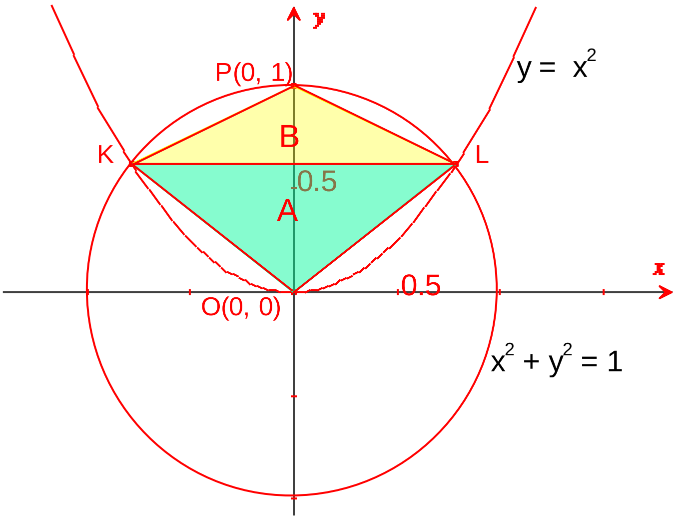
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDE}$:
$(c + x)^2 = x^2 + (c - x)^2$
Resolen liquació:
$x = \frac{1}{4}c$
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{CDE}}{S_{ABED}} = \frac{\frac{1}{2}\left(c - \frac{1}{4}c\right)c}{\frac{c + \frac{1}{4}c}{2} \cdot c} = \frac{3}{5}$$

3573.- En la intersecció de la paràbola $y = x^2$ i la circumferència $x^2 + y^2 = 0$ s'han dibuixat dos triangles d'àrees A, B. Calculeu la proporció d'àrees $A\colon B$



Solució:



Per calcular els punts intersecció de la paràbola i la circumferència, resolem el sistema format per les equacions de les dues còniques.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi}$$

Les coordenades dels punts d'intersecció són:

$$K\left(-\sqrt{\frac{1}{\Phi}}, \frac{1}{\Phi}\right), \qquad L\left(-\sqrt{\frac{1}{\Phi}}, \frac{1}{\Phi}\right)$$

Siga M el punt mig del segment $\overline{KL}$

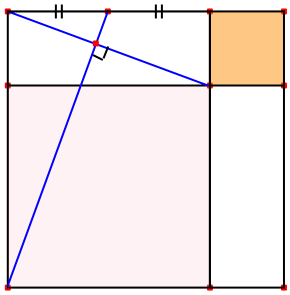
$$M\left(0, \frac{1}{\Phi}\right)$$

$$\overline{OM} = \frac{1}{\Phi}, \overline{PM} = 1 - \frac{1}{\Phi}$$

Dos triangles que tenen la mateixa base $\overline{KL}$ les àrees són proporcionals a les altures:

$$\frac{A}{B} = \frac{\overline{OM}}{\overline{PM}} = \frac{\frac{1}{\Phi}}{1 - \frac{1}{\Phi}} = \Phi$$

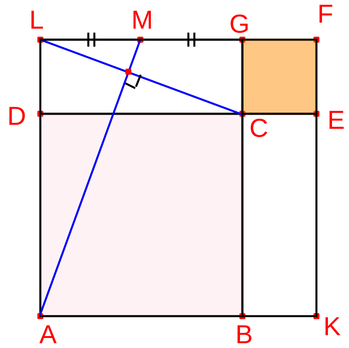
3574.- En la figura, determineu la proporció entre l'àrea dels quadrats rosa i taronja.



Solució:

Siguen els quadrats $ABCD, DEFG$.

Siga $\overline{LM} = a, \overline{GF} = b$



Els trangles rectangles $\overset{\Delta}{ALM}, \overset{\Delta}{LGC}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{a}{2a+b} = \frac{b}{2a}$$

$$2a^2 - 2ba + b^2 = 0$$

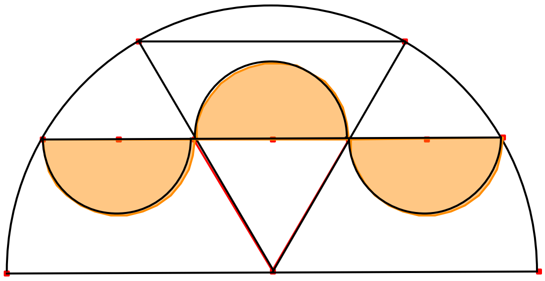
Resolent l'equació:

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

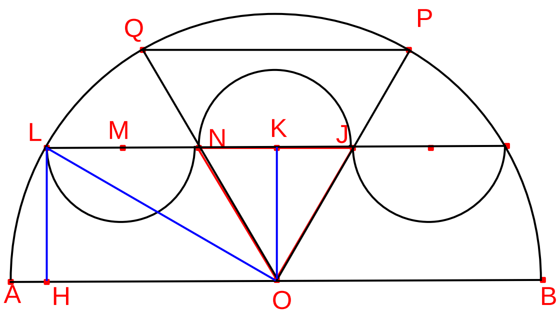
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{CEFG}} = \frac{4a^2}{b^2} = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$$

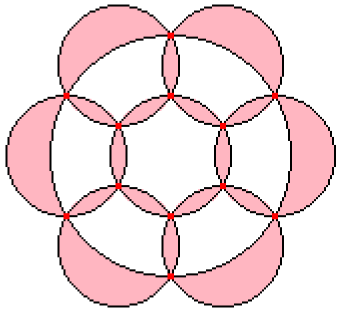
3575.- La figura està formada per un triangle en l'interior d'un semicercle i tres semicercles iguals.
Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels tres semicercles ombrejats i el semicercle exterior.



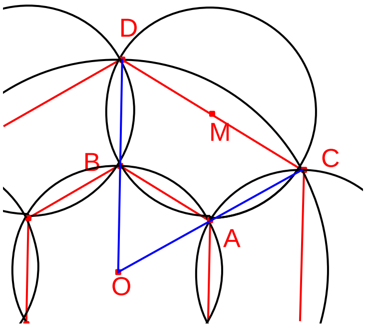
Solució:
Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$
Siguen els semicercles de centres M, K i diàmetres $\overline{LN} = \overline{NJ} = 2r$
$\overline{ON} = 2r, \overline{NK} = r$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{NKO}$
$\overline{OK} = r\sqrt{3}$
Siga la projecció H de L sobre el diàmetre $\overline{AB}$
$\overline{LH} = \overline{OK} = r\sqrt{3}, \overline{OH} = 3r, \overline{OL} = R$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LHO}$
$R^2 = 3r^2 + 9r^2$
$r^2 = \frac{1}{12}R^2$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{ombrejada}}{S_{semicercle}} = \frac{3 \cdot r^2}{R^2} = \frac{1}{4}$



3576.- La figura està formada per set circumferències de radi 1 i una de radi 2.
Calculeu el total de l'àrea ombrejada.



Solució:



Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = 1$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OC} = 2$
Siga la circumferència de centre M i radi $\overline{MC} = 1$

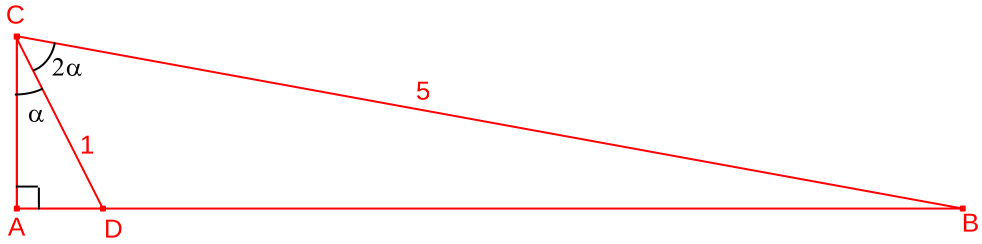
L'àrea esta formada per 24 segments circulars de radi 1 i 60º, més 6 lúnules (de dos arcs: una de 180º i radi 1 i un de 60º i radi 2).

L'àrea total és:

$$S = 24\left(\frac{1}{6}\pi \cdot 1^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2\right) + 6\left(\frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 - \frac{1}{6}\pi \cdot 2^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2\right) = 3\pi$$

3577.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°. \overline{BC} = 5$
Siga D un punt del catet $\overline{AB}$ tal que $\overline{CD} = 1, \angle ACD = \alpha, \angle DCB = 2\alpha$

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$



Solució:
$\angle ABC = 90° - 3\alpha, \angle CDB = 90° + \alpha$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{CDB}$:

$$\frac{1}{\cos 3\alpha} = \frac{5}{\cos \alpha}$$

$$\cos 3\alpha = \cos \alpha\,(1 - 4\sin^2 \alpha)$$

$$\frac{1}{1 - 4\sin^2 \alpha} = 5$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\overline{AC} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

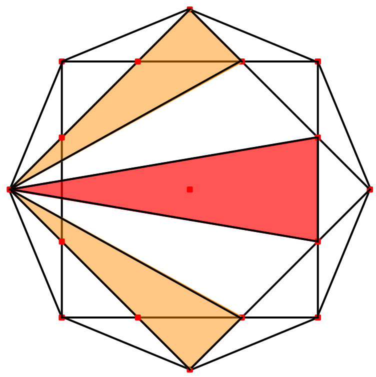
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$\overline{AB} = \frac{11\sqrt{5}}{5}$$

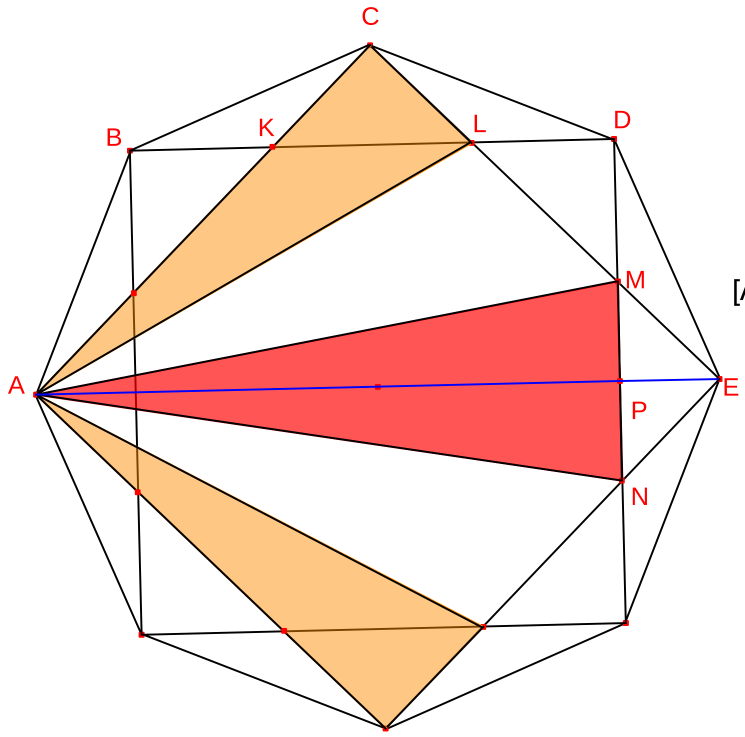
Ell àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{11\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{11}{5}$$

3578.- En un octògon regular s'han inscrit dos quadrats.
Calculeu la proporció entre l'àrea roja i l'àrea taronja.



Solució:



BK=CK=DL=c

KL=MN=c·sqrt(2)

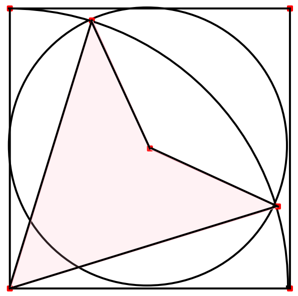
AC=BD=(2+sqrt(2))c

PE=(2·sqrt(2)+2)c

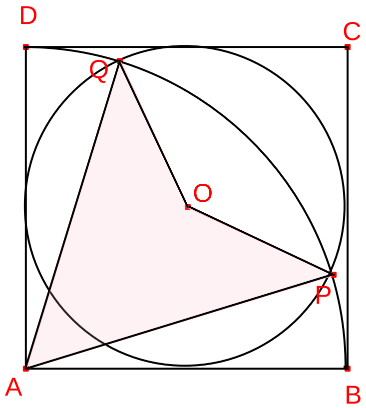
AP=(2+3·sqrt(2)/2)c

[AMN]/(2·[ACL])=(2+sqrt(2))/4

3579.- El quadrat de la figura d'àrea 8 té inscrita una circumferència i un quadrant.
Calculeu l'àrea del quadrilàter ombrejat que té un vèrtex en el centre del quadrat.



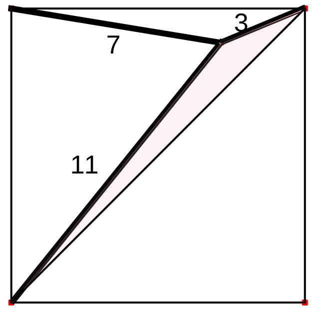
Solució:



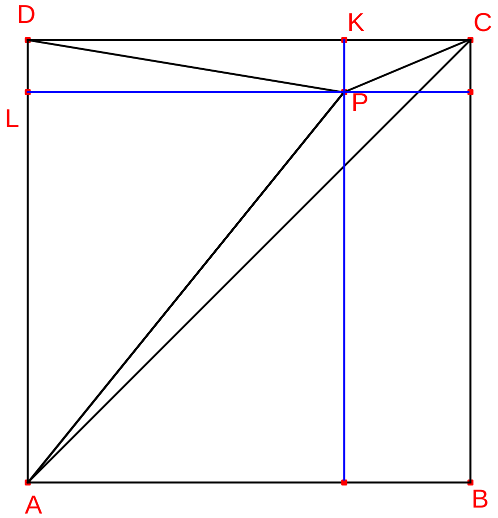
Siga el quadrat $ABCD$ d'àrea 8 i centre O.
$\overline{AB} = 2\sqrt{2}$
$\overline{AC} = 4$
Siga el quadrilàter $APOQ$, $\overline{AQ} = \overline{AB} = 2\sqrt{2}, \overline{OQ} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \sqrt{2}, \overline{AO} = \frac{1}{2}\overline{AC} = 2$.
Aplicant la fórmula d'Heró de l'àrea del triangle:

$$A_{APOQ} = 2 \cdot S_{AOQ} = 2\frac{\sqrt{(3\sqrt{2}+2)(3\sqrt{2}-2)(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}{4} = \sqrt{7}$$

3580.- Les distàncies d'un punt interior d'un quadrat a tres vèrtexs són 3, 7, 11.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga P el punt interior del quadrat tal que $\overline{PC} = 3, \overline{PD} = 7, \overline{PA} = 11.$
Siga K la projecció de P sobre el costat $\overline{CD}$
Siga L la projecció de P sobre el costat $\overline{AD}$
Siguen $\overline{CK} = a, \overline{DL} = b$



Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{CKP}, \overset{\Delta}{ALP}$:
$9 - a^2 = 49 - (c-a)^2$
$40 - c^2 + 2ac = 0$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{DLP}, \overset{\Delta}{DKP}$:
$49 - b^2 = 121 - (c-b)^2$
$72 - c^2 + 2bc = 0$

Restant les expressions:
$-16 + c(a-b) = 0$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADC}$
$S_{ADC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = S_{CDP} + S_{ADP} + S_{APC}$
$\frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}c \cdot b + \frac{1}{2}c(c-a) + S_{APC}$
Simplificant:
$\frac{1}{2}c(b-a) + S_{APC} = 0$
$\frac{1}{2}(-16) + S_{APC} = 0$
$S_{APC} = 8$