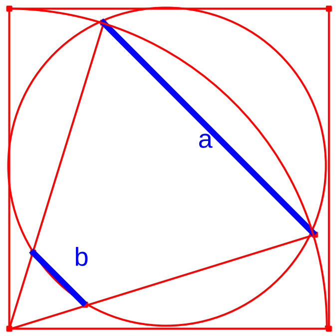
3581.- El quadrat de la figura té inscrita una circumferència i un quadrant.
Calculeu la proporció $a : b$

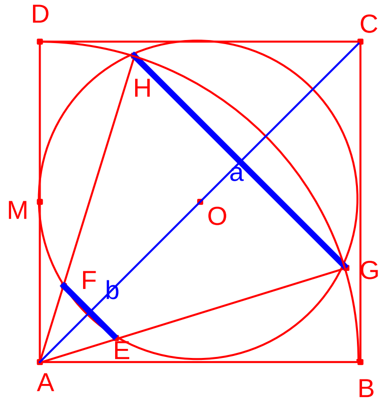


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Calculant la potència del punt A respecte de la circumferència de centre O.

$$\overline{AF} \cdot \overline{AH} = \overline{AM}^2$$

$$\overline{AF} \cdot c = \frac{1}{4}c^2$$

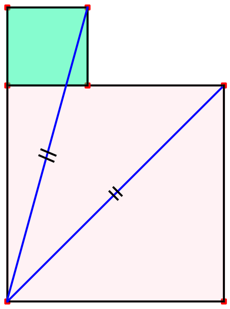
$$\overline{AF} = \frac{1}{4}c$$



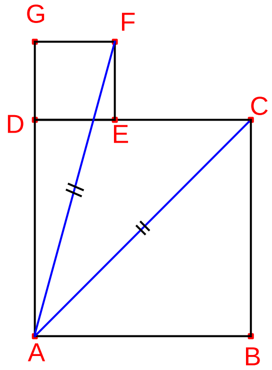
Notem que $\overline{AH} = \overline{AG}$, $\overline{AF} = \overline{AE}$
Els triangles $\overset{\Delta}{AGH}, \overset{\Delta}{AEF}$ són semblants.
La proporció que cerquem és:

$$\frac{a}{b} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AF}} = \frac{c}{\frac{1}{4}c} = 4$$

3582.- Calculeu la proporció entre les àrees dels dos quadrats de la figura.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrat $DEFG$ de costat $\overline{DE} = c$



$\overline{AF} = \overline{AC} = \sqrt{2}$
$\overline{AG} = 1 + c, \overline{GF} = c$

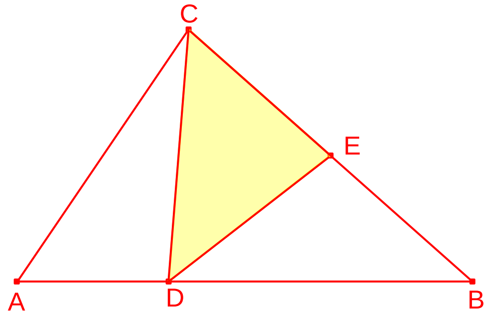
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGF}$:
$2 = c^2 + (1 + c)^2$
$2c^2 + 2c - 1 = 0$
Resolent l'equació:

$$c = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{DEFG}}{S_{ABCD}} = c^2 = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

3583.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AC} = 4, \overline{AB} = 6$
Siga D un punt del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{BD} = 2 \cdot \overline{AD}$
Siga E un punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{CE} = \overline{BE} = \frac{5}{2}$
Calculeu el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{CDE}$

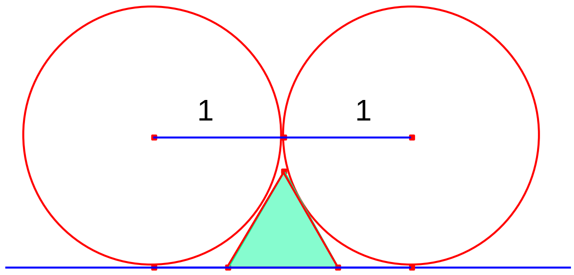


Solució:

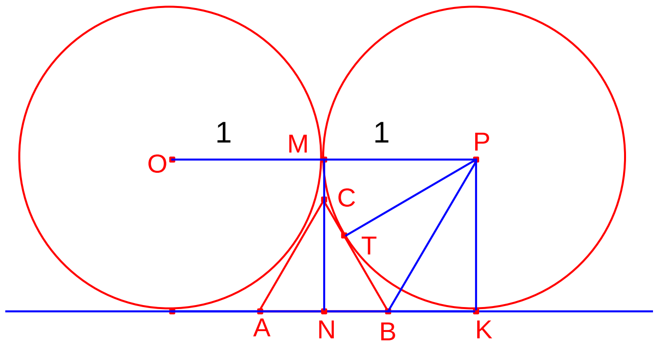
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$25 = 36 + 16 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos A$
$16 = 36 + 25 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos B$
Aleshores:
$\cos A = \frac{9}{16}, \cos B = \frac{3}{4}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ADC}$:
$\overline{CD}^2 = 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{16}$
$\overline{CD} = \sqrt{11}$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{DBE}$:
$\overline{DE}^2 = \frac{25}{4} + 16 - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3}{4}$
$\overline{DE} = \frac{\sqrt{29}}{2}$
El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{CDE}$ és:
$P_{CDE} = \frac{5}{2} + \sqrt{11} + \frac{\sqrt{29}}{2} \approx 8.5092$

3584.- La figura està formada per dues circumferències iguals de radi 1 tangents i a la vegada tangents a una recta.
Calculeu l'àrea del triangle equilàter d'àrea màxima afitat per les dues circumferències i la recta.

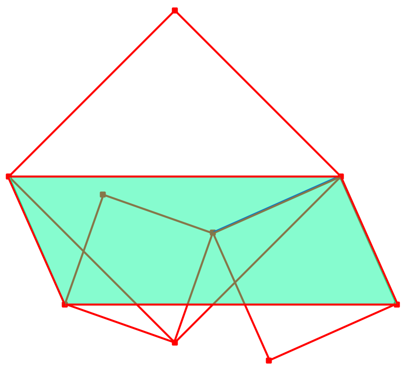


Solució:
Dos costats del triangle equilàter són tangents a cadascuna de les dues circumferències.
Siguen les circumferències de centre O, P, respectivament i radi $\overline{OM} = \overline{PM} = 1$
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga N el punt mig del costat $\overline{AB}$.

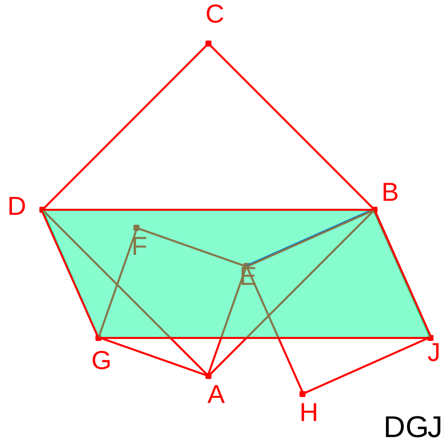


$$\overline{CN} = \frac{\sqrt{3}}{2}c, \overline{MN} = \overline{PT} = 1$$
$$\overline{MC} = \overline{CT} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}c$$
$$\overline{BT} = \overline{BK} = c - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}c\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{2}c - 1$$
$$\angle PBC = 60°$$
$$\frac{2+\sqrt{3}}{2}c - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
Resolent l'equació:
$$c = \frac{2\left(3-\sqrt{3}\right)}{3}$$
L'àrea del triangle equilàter és:
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{2\left(2\sqrt{3}-3\right)}{3} \approx 0.3094$$

3585.- La figura està formada per tres quadrats.
Proveu que el quadrilàter ombrejat és un paral·lelogram



Solució:



angle GAD=angle EAB

Els triangles GAD, EAB són iguals

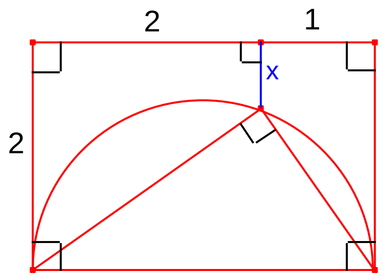
AD, AB perpendiculars

DG=BE i perpendiculars

DG=BJ iguals i paral·lels

DGJB és un paral·lelogram

3586.- En la figura calculeu la mesura del segment x.



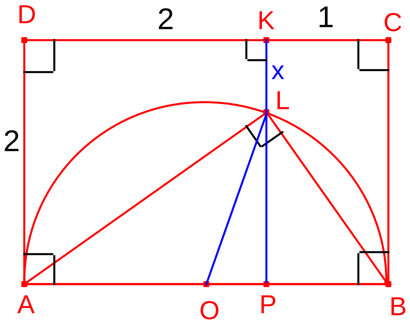
Solució:

Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 3, \overline{AD} = 2$

Siga $x = \overline{KL}$

Siga P la projecció de L sobre el costat $\overline{AB}$

El punt mig O del costat $\overline{AB}$ és el centre de la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}$



$\overline{OL} = \frac{3}{2}$

$\overline{OP} = \frac{1}{2}$

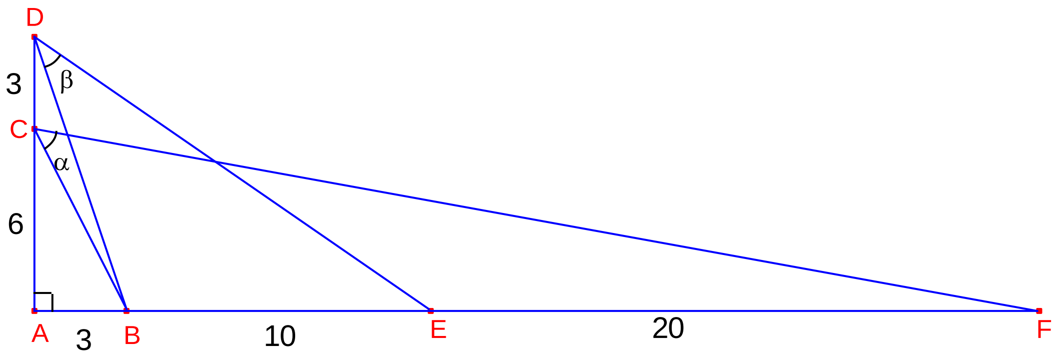
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPL}$:

$\frac{9}{4} = \frac{1}{4} + \overline{PL}^2$

$\overline{PL} = \sqrt{2}$

$x = 2 - \sqrt{2}$

3587.- En la figura, calculeu $\alpha + \beta$



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{ABD}, \overset{\Delta}{AED}, \overset{\Delta}{AFC}$, respectivament:

$\overline{BC} = 3\sqrt{5}$

$\overline{BD} = 3\sqrt{10}$

$\overline{DE} = 5\sqrt{10}$

$\overline{CF} = 15\sqrt{5}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCF}$:

$900 = 1125 + 45 - 2 \cdot 15\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{3}{5}, \sin\alpha = \dfrac{4}{5}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BDE}$:

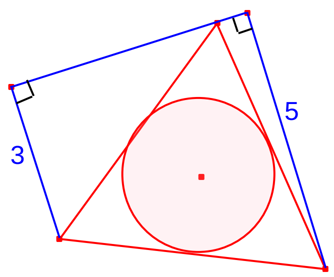
$100 = 90 + 250 - 2 \cdot 3\sqrt{10} \cdot 5\sqrt{10} \cdot \cos\beta$

$\cos\beta = \dfrac{4}{5}$

Aleshores, $\cos\beta = \sin\alpha$, per tant, α i β són complementaris.

$\alpha + \beta = 90°$

3588.- En la figura, calculeu l’àrea del cercle inscrit en el triangle equilàter.

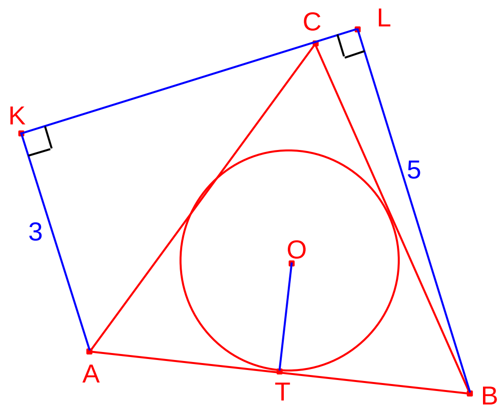


Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$

Siga la circumferència inscrita al triangle equilàter de centre O i radi $\overline{OT} = r$

$$r = \frac{1}{3}\overline{CT} = \frac{\sqrt{3}}{6}c$$



Siga $\alpha = \angle CBL$

$\angle KAC = 60° - \alpha$

$$\cos\alpha = \frac{5}{c}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{c^2 - 25}}{c}$$

$$\cos(60° - \alpha) = \frac{3}{c} = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$$

$$\frac{3}{c} = \frac{1}{2}\frac{5}{c} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{c^2 - 25}}{c}$$

Simplificant:

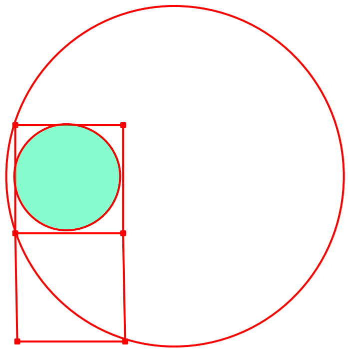
$$\sqrt{3}\sqrt{c^2 - 25} = 1$$

$$c^2 = \frac{76}{3}$$

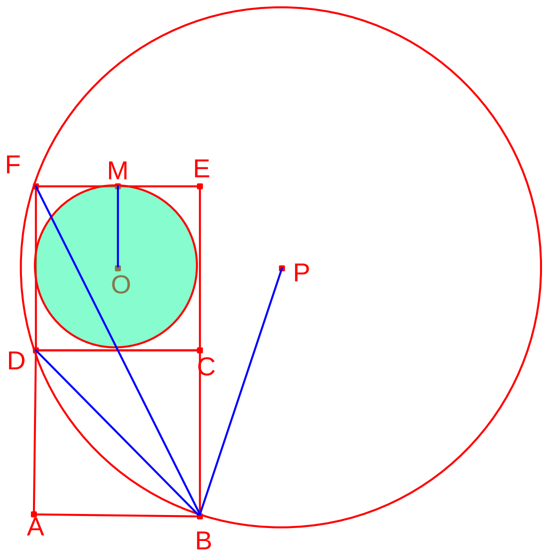
L’àrea del cercle és:

$$S = \pi r^2 = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}c\right)^2 = \pi\frac{1}{12}c^2 = \pi\frac{1}{12}\cdot\frac{76}{3} = \frac{19}{9}\pi$$

3589.- La figura està formada per dos quadrats i dos cercles.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos cercles.



Solució:



AB=2

OM=1

PB=R

BD=2·sqrt(2)

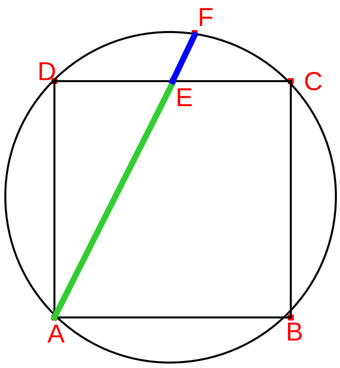
BF=2·sqrt(5)

[FDB]=2=(2·2·sqrt(2)·2·sqrt(5))/(4·R)

R=sqrt(10)

1/R²=1/10

3590.- En la figura, E és el punt mig del costat $\overline{CD}$ del quadrat $ABCD$ inscrit en la circumferència.
Calculeu la proporció $\overline{AE} : \overline{FE}$



Solució:
Siga $\overline{AB} = 2a$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$:

$\overline{AE} = a\sqrt{5}$

Aplicant la potència del punt E respecte de la circumferència:

$\overline{FE} \cdot \overline{AE} = \overline{DE} \cdot \overline{CE}$

$\overline{FE} \cdot a\sqrt{5} = a^2$

$\overline{FE} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\frac{\overline{AE}}{\overline{FE}} = 5$