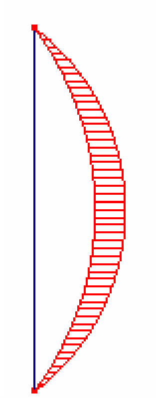
Problemes de Geometria per a l'ESO 36

351.- Determineu l'àrea de la lúnula la corda comuna de la qual mesura 24mi els radis de 15m i 20m.



Solució:

Siga $\overline{AB}=24$ la corda comuna.

Siga O_1 el centre de l'arc de radi 20, O_2 el centre de l'arc de radi 15.

Siga M el punt mig de la corda $\overline{AB}$.

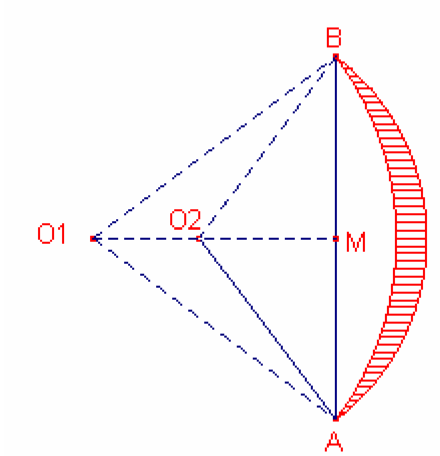
$\overline{O_1A}=20$, $\overline{AM}=12$. Aplicant el teorema de Pitàgores i raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO_1}$:

$\overline{O_1M}=16$, $\angle AO_1B=73º44'23''$.

$\overline{O_2A}=15$, $\overline{AM}=12$. Aplicant el teorema de Pitàgores i raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO_2}$:

$\overline{O_2M}=9$, $\angle AO_2B=106º15'37''$.

$\overline{O_1O_2}=\overline{O_1M}-\overline{O_2M}=16-9=7$.



L'àrea de la lúnula és igual a l'àrea del sector de radi 15 i corda $\overline{AB}$, menys l'àrea del sector de radi 20 i corda $\overline{AB}$, més el doble de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{O_1O_2A}$.

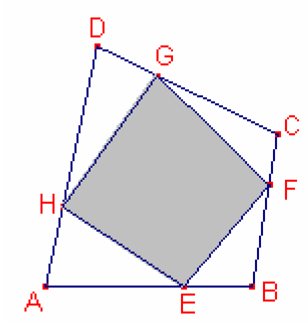
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{O_1O_2A}$ és:

$$S_{O_1O_2A}=\frac{\overline{O_1O_2}\cdot\overline{AM}}{2}=\frac{7\cdot 12}{2}=42.$$

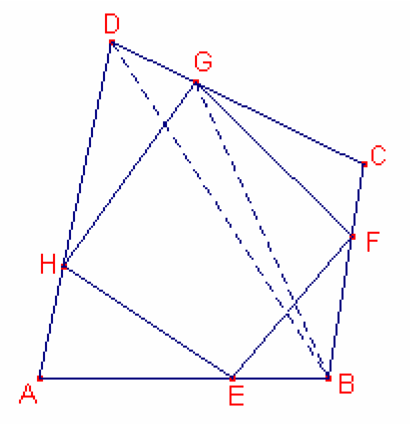
L'àrea de la lúnula és:

$$S=\frac{\pi\cdot 15^2\cdot 106º15'37''}{360º}-\frac{\pi\cdot 20^2\cdot 73º44'23''}{360º}+2\cdot 42\approx 35'24m^2.$$

352.- Siguen E; F, G i H punts dels costats quadrilàter convex ABCD tal que $\overline{AE} = 2 \cdot \overline{BE}$, $\overline{BF} = 2 \cdot \overline{CF}$, $\overline{CG} = 2 \cdot \overline{DG}$, $\overline{DH} = 2 \cdot \overline{AH}$.
Determineu la proporció entre les àrees dels quadrilàters ABCD i EFGH.
Garcia Ardura2. p729



Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.



Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CFG}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CFG}$, $\overset{\Delta}{BFG}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$S_{BFG} = 2S$.

$S_{CBG} = 3S$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CBG}$, $\overset{\Delta}{BDG}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$S_{BDG} = \frac{1}{2}3S = \frac{3}{2}S.$$

$$S_{BCD} = \frac{9}{2}S_{CFG} \qquad (1)$$

Anàlogament:

$$S_{BAD} = \frac{9}{2}S_{AHE} \qquad (2)$$

Sumant les expressions (1) (2):

$$S_{ABCD} = \frac{9}{2}\left(S_{CFG} + S_{AHE}\right) \qquad (3)$$

Anàlogament:

$$S_{ABCD} = \frac{9}{2}\left(S_{BEF} + S_{DGH}\right) \qquad (4)$$

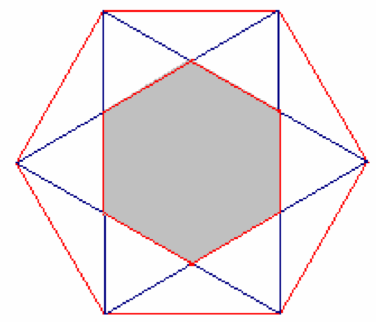
Sumant les expressions (3) (4):

$$2 \cdot S_{ABCD} = \frac{9}{2}\left(S_{CFG} + S_{AHE} + S_{BEF} + S_{DGH}\right) = \frac{9}{2}\left(S_{ABCD} - S_{EFGH}\right).$$

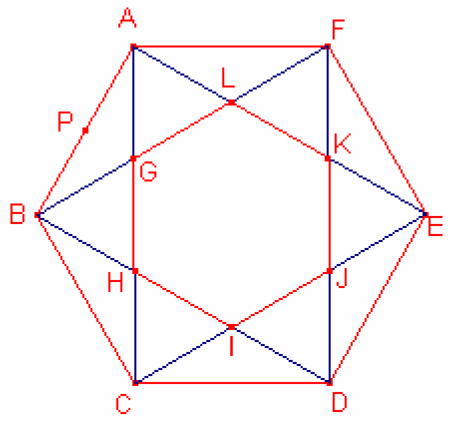
$$9 \cdot S_{EFGH} = 5 \cdot S_{ABCD}.$$

$$\frac{S_{EFGH}}{S_{ABCD}} = \frac{5}{9}.$$

353.- En un hexàgon regular s'ha inscrit dos triangles equilàters que formen un altre hexàgon regular en l'interior.
Determineu la proporció entre les àrees dels dos hexàgons.



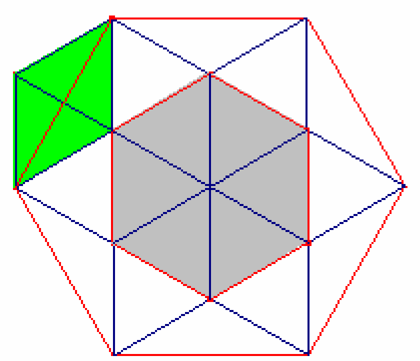
Solució 1:
Siga ABCDEF l'hexàgon regular exterior, GHIJKL l'hexàgon regular interior.
Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga $c=\overline{AB}$ costat de l'hexàgon exterior.
Per ser ABCDEF un hexàgon regular:
$\angle CAE=60^o$, $\angle ABG=\angle BAC=30^o$.



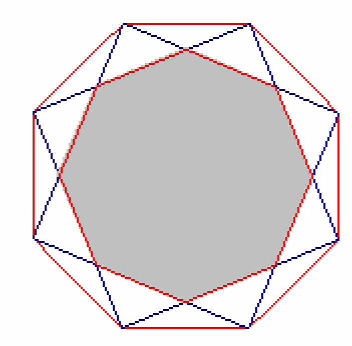
Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{ABG}$, $\overset{\Delta}{AFL}$ són iguals ja que tenen un costat igual i els angles adjacents al costats iguals, per tant:
$\overline{AG}=\overline{AL}$.
Aleshores, $\overset{\Delta}{ALG}$ és un triangle equilàter.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APG}$:
$\frac{\overline{AP}}{\overline{AM}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{AP}=\frac{c}{2}$. Aleshores, $\overline{AM}=\frac{1}{\sqrt{3}}c$.
Els dos hexàgons regulars són semblants, la raó de les àrees és igual a quadrat de la raó dels costats:

$$\frac{S_{GHIJKL}}{S_{ABCDEF}}=\left(\frac{\overline{AM}}{\overline{BC}}\right)^2=\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}c}{c}\right)^2=\frac{1}{3}.$$

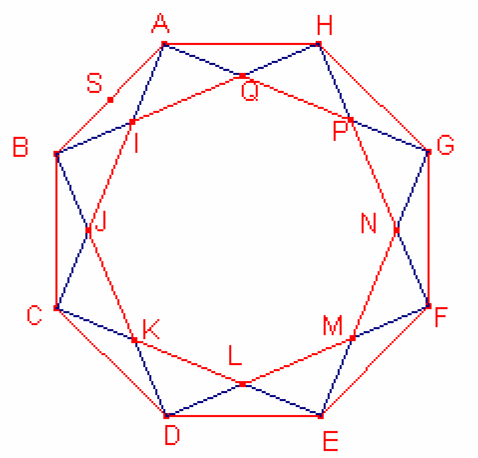
Solució 2:
L'hexàgon interior conté 6 triangle equilàters, l'hexàgon exterior en conté 18.
La proporció entre les àrees és $\frac{1}{3}$.



354.- En un octògon regular s'ha inscrit dos quadrats que formen un altre octògon regular en l'interior.
Determineu la proporció entre les àrees dels dos octògon.



Solució:
Siga ABCDEFGH l'octògon regular exterior, IJKLMNPQ l'octògon regular interior.



Siga S el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga $c=\overline{AB}$ costat de l'octògon exterior.
Per ser ABCDEFGH un octògon regular:
$\angle CAE = 90^o$, $\angle ABG = \angle BAC = \dfrac{45^o}{2}$.

Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{ABI}$, $\overset{\Delta}{AHQ}$ són iguals ja que tenen un costat igual i els angles adjacents al costats iguals, per tant:
$\overline{AI} = \overline{AQ}$.

Aleshores, $\overset{\Delta}{ALG}$ és un triangle rectangle isòsceles.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ASI}$:
$\dfrac{\overline{AS}}{\overline{AI}} = \cos\dfrac{45^o}{2}$, $\overline{AS} = \dfrac{c}{2}$. Aleshores, $\overline{AI} = \dfrac{1}{2\cdot\cos\dfrac{45^o}{2}}c$.

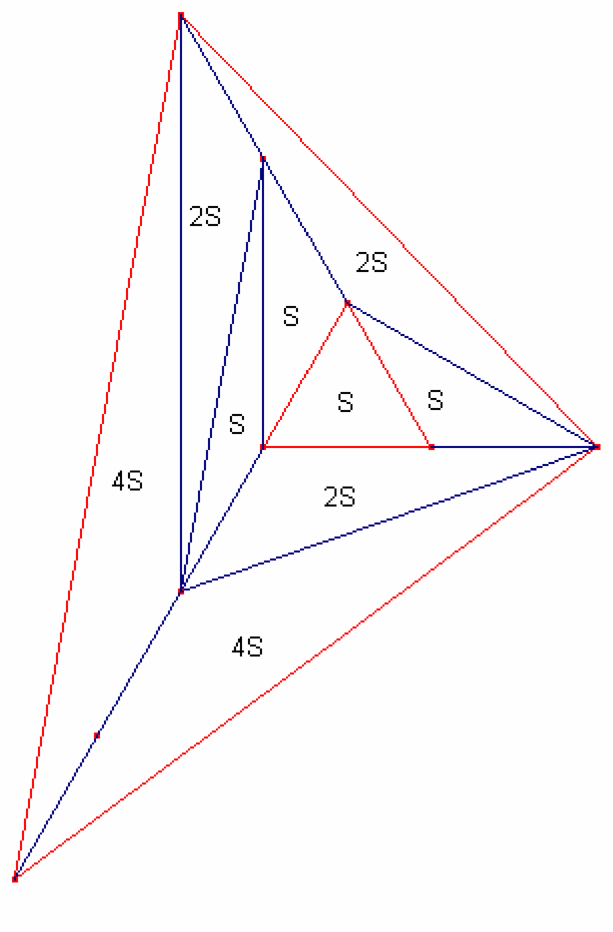
$\overline{QI} = \overline{AI}\sqrt{2}$.
$\overline{QI} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\cdot\cos\dfrac{45^o}{2}}c$.

Els dos octògons regulars són semblants, la raó de les àrees és igual a quadrat de la raó dels costats:

$$\frac{S_{IJKLMNPQ}}{S_{ABCDEFGH}} = \left(\frac{\overline{QI}}{\overline{BC}}\right)^2 = \left(\frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2\cos\dfrac{45^o}{2}}c}{c}\right)^2 = 2-\sqrt{2}.$$

356.- En les prolongacions d'un triangle equilàter de costat c, en el mateix sentit, s'agafen unes longitud, c, 2c, 3c. Calculeu la raó entre les àrees del triangle que resulta d'unir les prolongacions i el triangle equilàter.
García Ardura2. problema 764.

Solució:

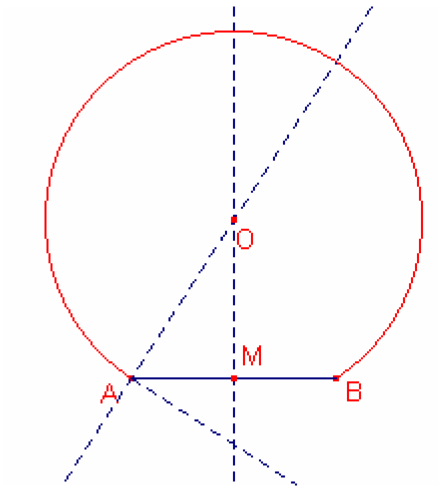


El triangle format per les prolongacions té 18 vegades l'àrea del triangle equilàter interior.

356.- Determineu la longitud d'un arc capaç de 32º54' dibuixat sobre un segment de 54m.
García Ardura2. Problema 774.

Solució:

Siga el segment $\overline{AB} = 54$.
Siga O el centre de l'arc capaç.
$\angle AOB = 2 \cdot 32º54' = 65º48'$.
Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$.
$\overline{AM} = 27$, $\angle AOM = 32º54'$.



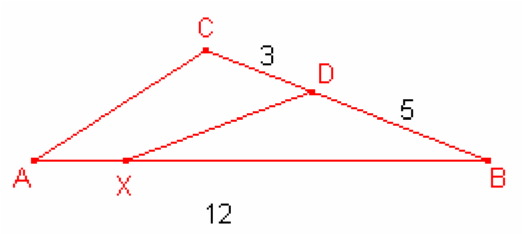
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:

$$\overline{OA} = \frac{27}{\sin 32º54'}.$$

L'arç abraça $360º–65º48' = 294º12'$.
La mesura de l'arc és:

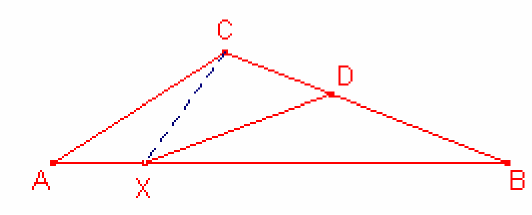
$$L_{arc} = \frac{2\pi \frac{27}{\sin 32º54'} 294º12'}{360º} = 255'24m.$$

357.- En la figura l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és el doble de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{XBD}$.
Si $\overline{AB}=12$, $\overline{BD}=5$ i $\overline{CD}=3$, calculeu la mesura del segment $\overline{BX}$.
García Ardura. Problema 599.



Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BDX}$.
$S_{ABC}=2S$



Els triangles $\overset{\Delta}{BDX}$ i $\overset{\Delta}{CDX}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$\frac{S_{CDX}}{S_{BDX}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\frac{3}{5}.$$

Aleshores, $S_{CDX}=\frac{3}{5}S$.

figura l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és el doble de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{XBD}$, aleshores l'àrea del quadrilàter ACDX és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Per tant, $S_{AXC}+S_{CDX}=S$.

Aleshores, $S_{AXC}=\frac{2}{5}S$.

$$S_{XBC}=S_{ABC}+S_{CDX}=\frac{8}{5}.$$

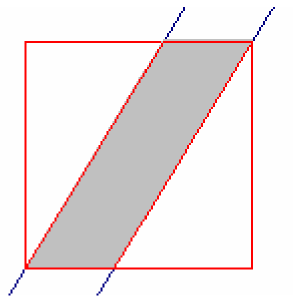
Els triangles $\overset{\Delta}{XBC}$ i $\overset{\Delta}{ABC}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$\frac{S_{XBC}}{S_{ABC}}=\frac{\overline{BX}}{\overline{AB}}.$$

$$\frac{\frac{8}{5}S}{2S}=\frac{\overline{BX}}{12}.$$ Resolent l'equació:

$$\overline{BX}=\frac{48}{5}.$$

358.- Pels vèrtexs oposats d'un quadrat de costats 6cm es tracen dues rectes paral·leles que equidisten 2cm. Determineu l'àrea del paral·lelogram que determinen les rectes i el quadrat.
García Ardura. Problema 692.



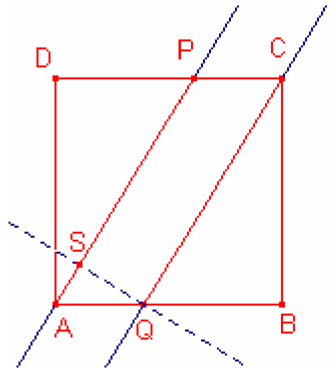
Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = 6$

La recta que passa pel vèrtex A talla el costat $\overline{CD}$ en el punt P.

La recta que passa pel vèrtex C talla el costat $\overline{AB}$ en el punt Q.

Volem calcular l'àrea del paral·lelogram APCQ.



Siga $x = \overline{BQ}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QBC}$:

$\overline{QC} = \sqrt{6^2 + x^2}$.

Siga S la projecció de Q sobre el segment $\overline{AP}$.

$\overline{SQ} = 2$, $\overline{AQ} = 6 - x$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ASQ}$, $\overset{\Delta}{QBC}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{SQ}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{QC}}. \quad \frac{2}{6-x} = \frac{6}{\sqrt{36+x^2}}.$$

Resolent l'equació:

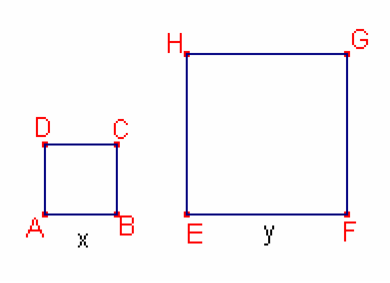
$$x = \frac{27-\sqrt{153}}{4}.$$

$$\overline{AQ} = 6 - x = \frac{-3+\sqrt{153}}{4}.$$

L'àrea del paral·lelogram APCQ és:

$$S_{APCQ} = \overline{AQ} \cdot \overline{BC} = \left(\frac{-3+\sqrt{153}}{4}\right) 6 \approx 14'05\,cm^2.$$

359.- Determineu el mínim de la suma de les àrees de dos quadrats si la suma dels perímetres és 56.



Solució:

Siguen els quadrat ABCD, EFGH, de costats $\overline{AB} = x$, $\overline{EF} = y$.

La funció a optimitzar és la suma de les seues àrees:

$S(x, y) = x^2 + y^2$.

La suma dels perímetres dels dos quadrats és 56:

$4x + 4y = 56$.

$y = 14 - x$.

Aleshores, $S(x) = x^2 + (14 - x)^2$.

$S(x) = 2x^2 - 28x + 196$.

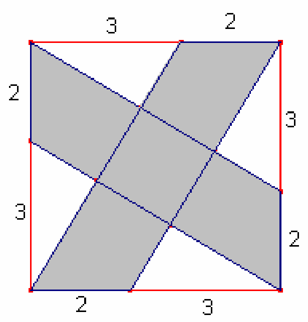
La funció és una paràbola còncava. El seu mínim s'assoleix en el vèrtex.

El mínim s'assoleix quan $x = \frac{28}{2 \cdot 2} = 7$.

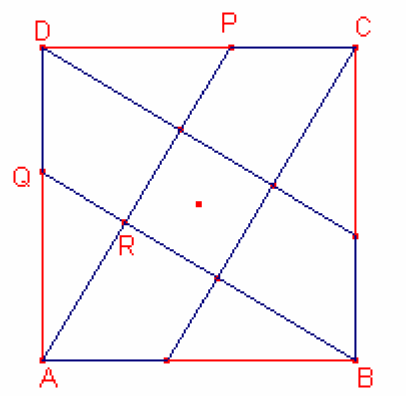
La suma d'àrees mínima és $S(7) = 98$.

Notem que el mínim s'assoleix quan els dos quadrats són iguals.

360.- En la figura calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:



L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADP}$ és:

$$S_{ADP}=\frac{3\cdot 5}{2}=\frac{15}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADP}$:

$$\overline{AP}=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ADP}$, $\overset{\Delta}{ARQ}$ són semblants, aleshores les àrees són proporcionals al quadrat de la raó de semblança:

$$\frac{S_{ARQ}}{S_{ADP}}=\left(\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}\right)^2.$$

$$\frac{S_{ARQ}}{\frac{15}{2}}=\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)^2.$$

Aleshores, $S_{ARQ}=\frac{15}{2}\frac{9}{34}=\frac{135}{68}$.

L'àrea de la zona ombrejada és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys quatre vegades l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ARQ}$:

$$S=5^2-4\cdot\frac{135}{68}=\frac{290}{17}.$$