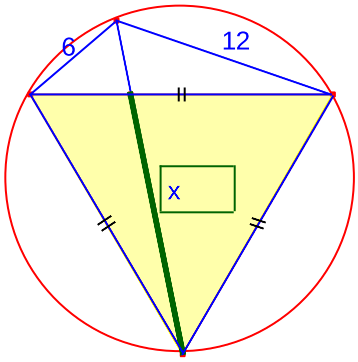
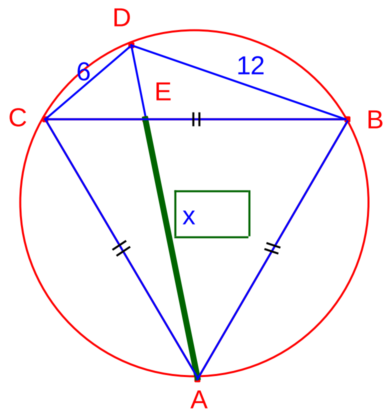
3591.- La circumferència de la figura té inscrit un triangle equilàter i dues cordes de longituds 6, 12. Calculeu la mesura del segment x.

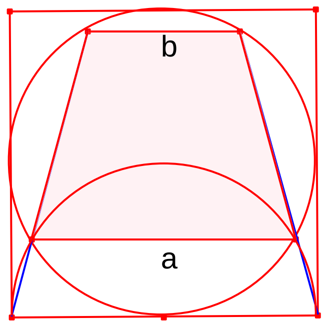


Solució.

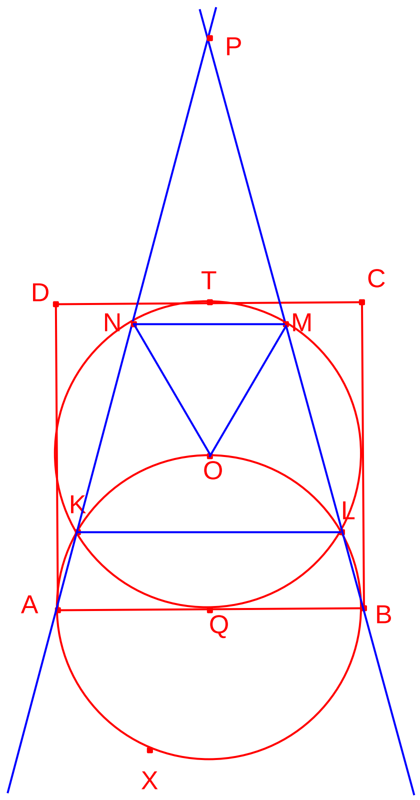
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga $\overline{CD} = 6, \overline{BD} = 12$
Siga $\overline{AE} = 4$
Aplicant el teorema de Tolomeu al quadrilàter inscriptible ABDC:
$6c + 12c = \overline{AD} \cdot c$
$\overline{AD} = 18$
Els triangles $\overset{\Delta}{CED}, \overset{\Delta}{ADB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{DE}}{12} = \frac{6}{18}$$
Resolent l'equació:
$\overline{DE} = 4$
$x = \overline{AE} = \overline{AD} - \overline{De} = 18 - 4 = 14$



3592.- En un quadrat s’ha inscrit una circumferència i una semicircumferència amb el diàmetre sobre un costat.
Calculeu la proporció $a : b$



Solució:



KL=a, NM=b

AB=2r

a=r·sqrt(3)

arcAXB=180º

arcKOL=120º

angleAPB=(180º-120º)/2=30º

arcKQL=120º

arcKQL-arcNTM)=2·30º

arcNTM=60º

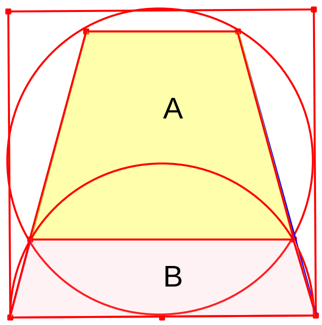
angleNOM=60º

ONM equilàter

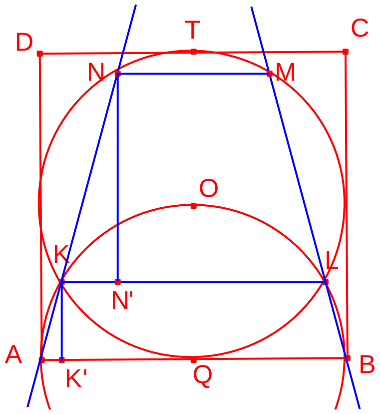
MN=b=r

a/b=sqrt(3)

3593.- En un quadrat s'ha inscrit una circumferència i una semicircumferència amb el diàmetre sobre un costat. Calculeu la proporció de les àrees dels trapezis ombrejats $A : B$



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2r$
Pel problema anterior:
$\overline{MN} = r, \overline{KM} = r\sqrt{3}$



Siga K' la projecció de K sobre el costat $\overline{AB}$

$$\overline{KK'} = \frac{1}{2}r$$

$$\overline{AK'} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}r$$

Siga N' la projecció de N sobre $\overline{KL}$

$$\overline{KN'} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}r$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AK'K}, \overset{\Delta}{KN'N}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

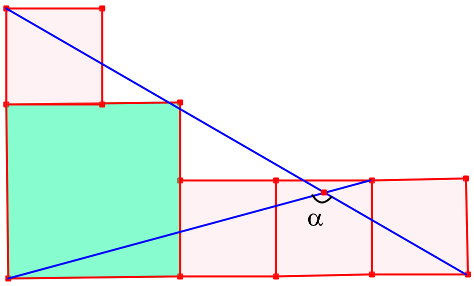
$$\frac{\frac{1}{2}r}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}r} = \frac{\overline{NN'}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}r}$$

$$\overline{NN'} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}r$$

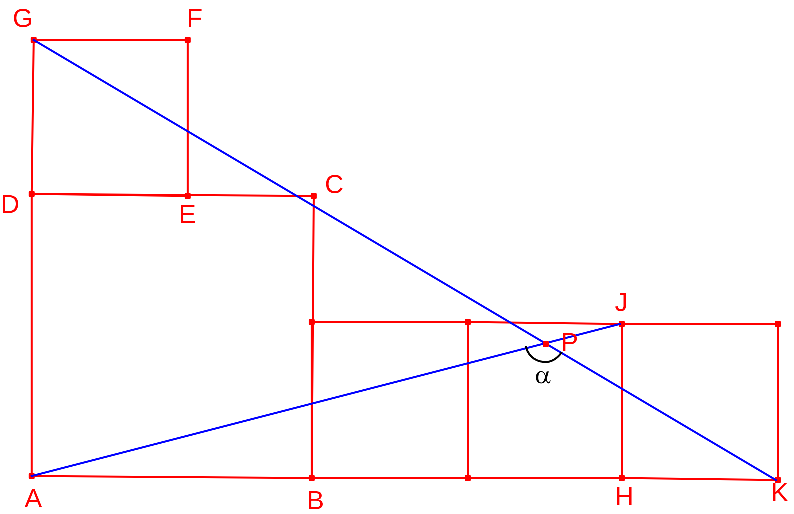
La proporció entre les àrees dels trapezis és:

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}r \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{2}r}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}r \cdot \frac{1}{2}r} = 2$$

3594.- La figura està formada per cinc quadrats, quatre d'ells iguals.
Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:

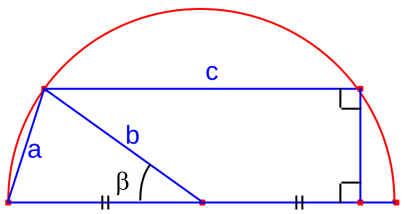


Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = b$
Siga el quadrat $DEFG$ de costat $\overline{DE} = c$
Siga $\angle APK = \alpha$
Siguen $\angle PAB = \beta, \angle PKA = \gamma$

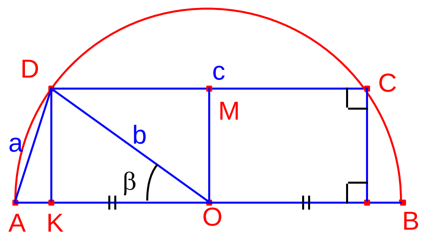
$$\tan\beta = \frac{c}{2c+b}$$
$$\tan\gamma = \frac{b+c}{3c+b}$$
$$\tan(\beta+\gamma) = \frac{\tan\beta + \tan\gamma}{1-\tan\beta\cdot\tan\gamma} = \frac{\frac{c}{2c+b}+\frac{b+c}{3c+b}}{1-\frac{c}{2c+b}\cdot\frac{b+c}{3c+b}} = \frac{5c^2+b^2+4bc}{5c^2+b^2+4bc} = 1$$

$\beta + \gamma = 45°$
$\alpha = 180° - (\beta+\gamma) = 135°$

3595.- En la figura, $a + b = c$
Calculeu la mesura de l'angle β



Solució:



Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2b$
$\overline{CD}$ i $\overline{AB}$ són paral·lels.
Siga M el punt mig del segment $\overline{CD}$
Siga K la projecció de D sobre el diàmetre $\overline{AB}$

$$\overline{OK} = \overline{DM} = \frac{1}{2}c = \frac{a+b}{2}$$

$$\overline{AK} = b - \overline{OK} = \frac{b-a}{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKD}, \overset{\Delta}{OKD}$:

$$a^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = b^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

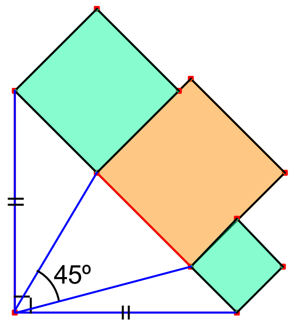
Simplificant:

$$b^2 - ab - a^2 = 0$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

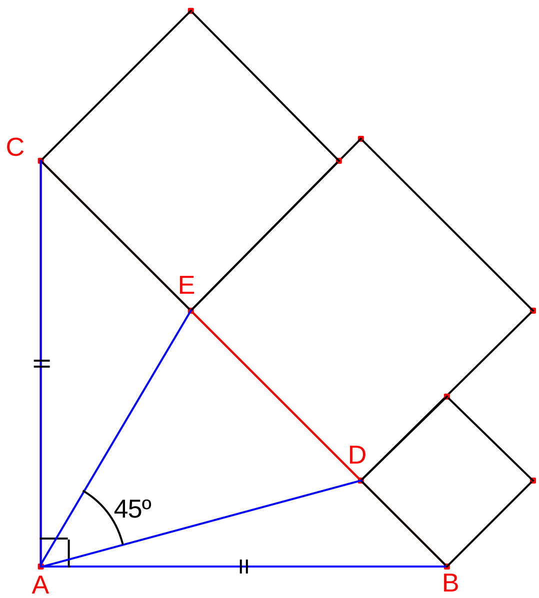
El triangle $\overset{\Delta}{ADO}$ és auri.
Aleshores, $\beta = 36°$

3596.- La figura està formada per un triangle rectangle isòsceles i tres quadrats sobre la hipotenusa.
Quina àrea és més gran, l'àrea del quadrat taronja o la suma de les àrees dels triangles blaus.



Solució:

Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°, \overline{AB} = \overline{AC} = 1$
Siga $\overline{BD} = a, \overline{CE} = b, \overline{DE} = c$
Siga $\overline{AD} = x$
Siga $\alpha = \angle BAD$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{x}{\sin 45°} = \frac{1}{\sin(45° + \alpha)}$$

Aleshores:

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin(45° + \alpha)}, \qquad x = \frac{\sin 45°}{\sin(45° + \alpha)}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ADE}$:

$$\frac{c}{\sin 45°} = \frac{x}{\cos\alpha}$$

$$c = \frac{1}{2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin(45° + \alpha)}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AEC}$:

$$\frac{b}{\sin(45° - \alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$b = \frac{\sin(45° - \alpha)}{\cos\alpha}$$

La suma de les àrees dels quadrats blaus és:

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin(45° + \alpha)}\right)^2 + \left(\frac{\sin(45° - \alpha)}{\cos\alpha}\right)^2 =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \sin^2(45° - \alpha) \cdot \sin^2(45° + \alpha)}{\cos^2\alpha \cdot \sin^2(45° + \alpha)} =$$

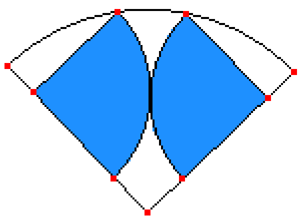
$$= \frac{\frac{1}{4}}{\cos^2\alpha \cdot \sin^2(45° + \alpha)}$$

L'àrea del quadrat taronja és:

$$c^2 = \frac{1}{4 \cdot \cos^2\alpha \cdot \sin^2(45° + \alpha)}$$

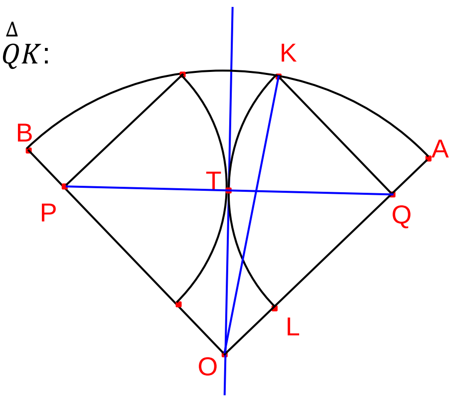
Aleshores les àrees són iguals: $c^2 = a^2 + b^2$

3597.- Calculeu la proporció entre la suma d'àrees dels quadrants iguals ombrejats i l'àrea del quadrant exterior.



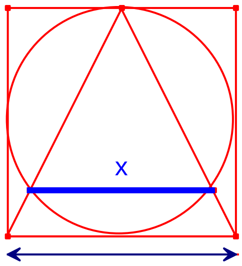
Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$
Siguen els quadrants de centres P, Q, respectivament i radis $\overline{PT} = \overline{PQ} = r$
$\overline{OQ} = r\sqrt{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQK}$:

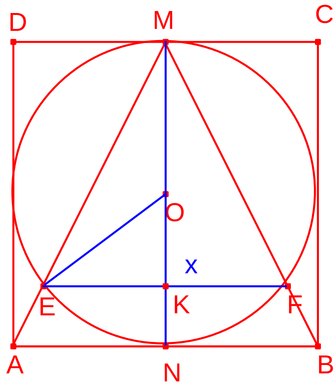


$1 = r^2 + 2r^2$
$r^2 = \frac{1}{3}$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{2 \cdot r^2}{1^2} = \frac{2}{3}$

3598.- Un quadrat de costat 5 té inscrita una circumferència i un triangle.
Calculeu la mesura del segment x



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 5$ i centre O
Siga $x = \overline{EF}$
Siga $a = \overline{OK}$



$\overline{KM} = \frac{5}{2} + a$

Els triangles $\overset{\Delta}{ANM}, \overset{\Delta}{EKM}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\frac{5}{2} + a}{\frac{x}{2}} = 2$$

Simplificant:
$2a = 2x - 5$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EKO}$:

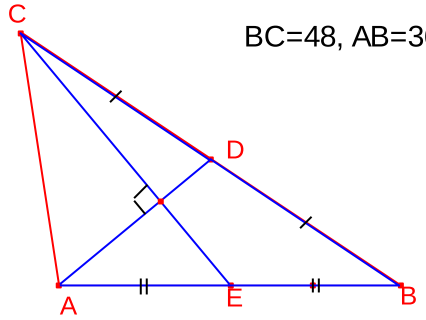
$$\frac{25}{4} = \frac{x^2}{4} + a^2$$

$25 = x^2 + 4a^2$

$25 = x^2 + 4x^2 - 20x + 25$

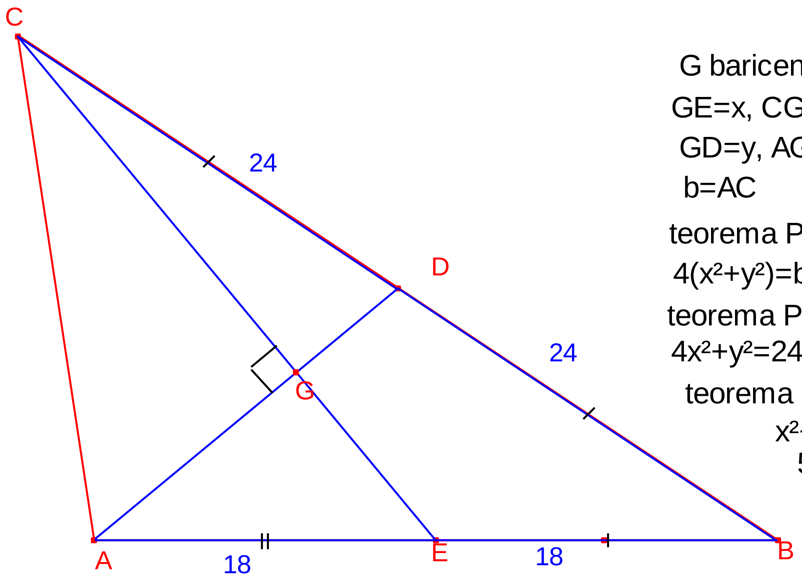
$x = 4$

3599.- Calculeu la mesura del costat $\overline{AC}$



BC=48, AB=36

Solució:



G baricentre

GE=x, CG=2x

GD=y, AG=2y

b=AC

teorema Pitàgores AGC

$4(x^2+y^2)=b^2$

teorema Pitàgores CGD

$4x^2+y^2=24^2$

teorema Pitàgores AGE

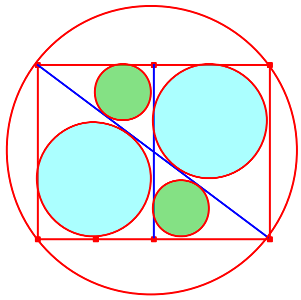
$x^2+4y^2=18^2$

$5(x^2+y^2)=900$

$b^2=720$

$b=12\cdot\text{sqrt}(5)$

3600.- La figura està formada per un rectangle inscrit en un cercle.
Calculeu la proporció entre la suma de les àrees ombrejades i l'àrea del cercle exterior.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 2a, \overline{AC} = b$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$\overline{BD} = \sqrt{4a^2 + b^2}$

Siga la circumferència exterior de centre O i radi $\overline{OB} = R$

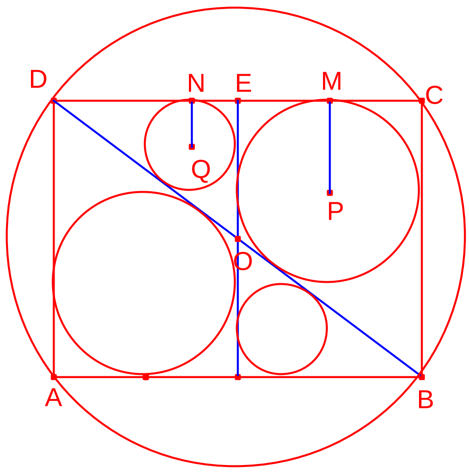
$R = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{2}$

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PM} = r$

$\overline{PM} = r = \frac{1}{2}a$

Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QN} = s$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DEO}, \overset{\Delta}{DCB}$ són semblants i de raó $1 : 2$



Aleshores:

$s = \frac{1}{2}r = \frac{1}{4}a$

La circumferència de centre P està inscrita al quadrilàter BCEO.
Aleshores:

$a + \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{2} = b + \frac{1}{2}b$

$\sqrt{4a^2 + b^2} = 3b - a$

Elevant al quadrat:

$b = \frac{3}{2}a$

$R = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{2} = \frac{5}{4}a$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{2r^2 + 2s^2}{R^2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4}a^2 + 2 \cdot \frac{1}{16}a^2}{\frac{25}{16}a^2} = \frac{2}{5}$$