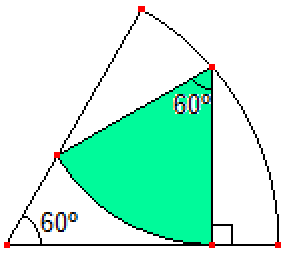
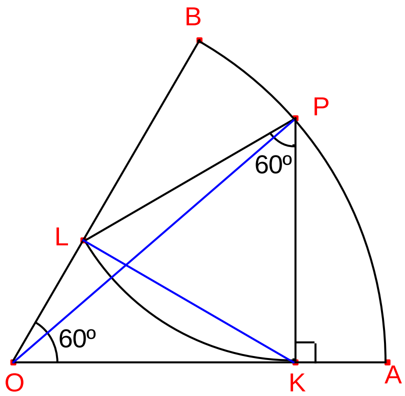
3601.- Determineu la proporció entre les àrees dels dos sectors circulars de 60º.



Solució:



Siga el sector circular de centre O i radi $\overline{OA} = R$ i 60º.
Siga el sector circular de centre P i radi $\overline{PK} = r$ i 60º
$\overline{LK} = r, \angle LKP = 60°$
$\angle OKL = 30°, \angle OLK = 90°$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OLK}$:

$$\overline{OK} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$

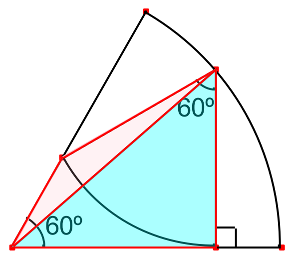
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKP}$:

$$R^2 = r^2 + \frac{4}{3}r^2 = \frac{7}{3}r^2$$

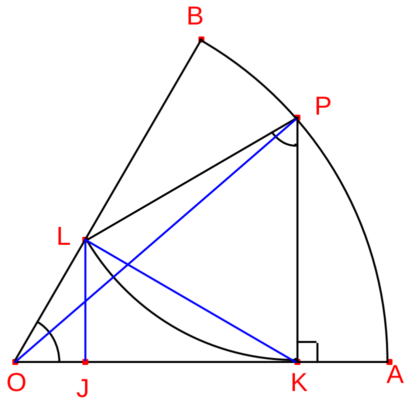
La proporció d'àrees dels dos sectors és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{3}{7}$$

3602.- Determineu la proporció entre les àrees dels dos triangles ombrejats sobre dos sectors circulars de 60º.



Solució:
Siga el sector circular de centre O i radi $\overline{OA} = R$ i 60º.
Siga el sector circular de centre P i radi $\overline{PK} = r$ i 60º
$\overline{LK} = r, \angle LKP = 60°$
$\angle OKL = 30°, \angle OLK = 90°$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OLK}$:

$$\overline{OK} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OKP}$ és:

$$S_{OKP} = \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{3}}{3}r \cdot r = \frac{\sqrt{3}}{3}r^2$$

Siga J la projecció de L sobre $\overline{OA}$:

$$\overline{LJ} = \frac{1}{2}r$$

Calculem L'àrea del quadrilàter $OKPL$:

$$S_{OKPL} = S_{OKL} + S_{KPL} = \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{3}}{3}r \cdot \frac{1}{2}r + \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 = \frac{5\sqrt{3}}{12}r^2$$

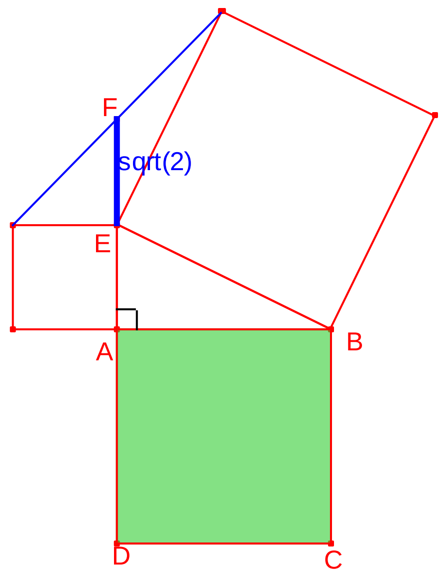
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OPL}$ és:

$$S_{OPL} = S_{OKPL} - S_{OKP} = \frac{5\sqrt{3}}{12}r^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}r^2 = \frac{\sqrt{3}}{12}r^2$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{OPL}}{S_{OKP}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{12}r^2}{\frac{\sqrt{3}}{3}r^2} = \frac{1}{4}$$

3603.- Sobre l'exterior d'un triangle rectangle s'han dibuixat tres quadrats.
Determineu l'àrea del quadrat ABCD si $\overline{EF} = \sqrt{2}$



Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABE}, A = 90°, \overline{AB} = e, \overline{AE} = b, \overline{BE} = a$

Siga P la projecció de L sobre la recta KE

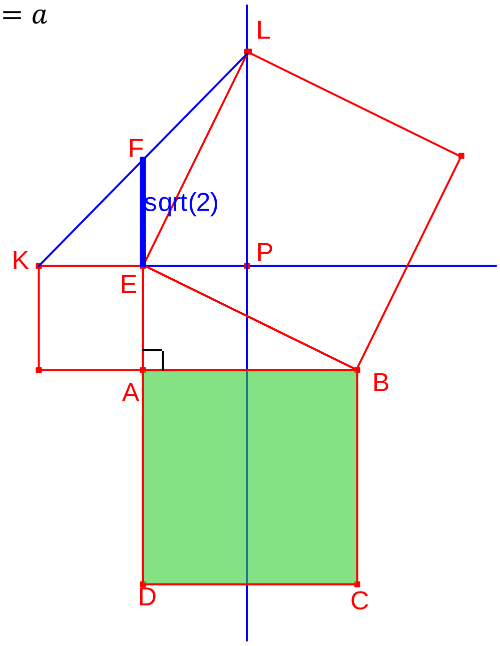
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABE}, \overset{\Delta}{KEL}$ tenen la mateixa àrea.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABE}, \overset{\Delta}{PLE}$ són iguals.

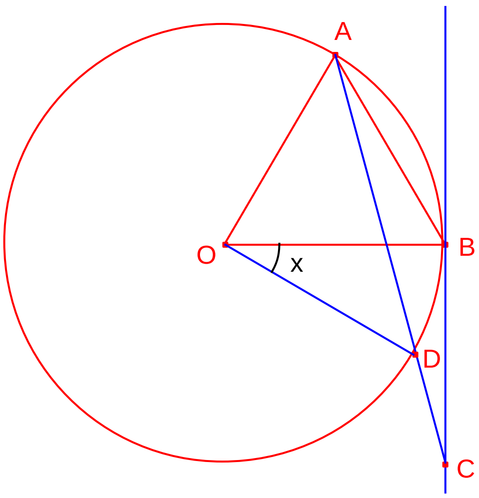
$\overline{LP} = e, \overline{EP} = \overline{KE} = b$

Aleshores, $e = \overline{LP} = 2 \cdot \overline{EF} = 2\sqrt{2}$

$S_{ABCD} = e^2 = 8$



3604.- En la figura, $\overline{OA} = \overline{AB}$.
$\overline{BC}$ és tangent a la circumferència. $\overline{AB} = \overline{BC}$
Calculeu la mesura de l'angle $x = \angle BOD$

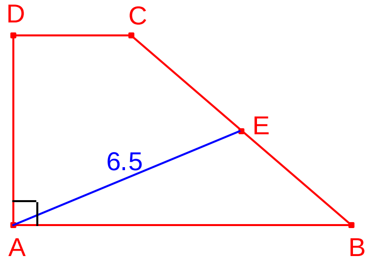


Solució:

El triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és equilàter.

El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles, $\angle ABC = 60° + 90° = 150°$
$\angle BAC = \angle ACB = 15°$
L'angle $x = \angle BOD$ és central.
$\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC = 30°$

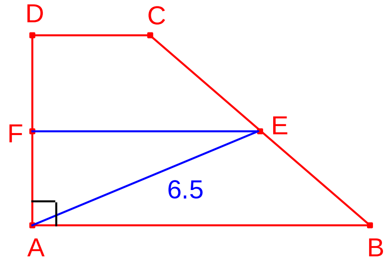
3605.- Calculeu l'àrea del trapezi rectangle $ABCD$ sabent que:
$\overline{CE} = \overline{BE}$
$\overline{AE} = 6.5$
$\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{AD} = 17$



Solució:
Siga F la projecció de E sobre $\overline{AD}$
$\overline{FE}$ és la paral·lela mitjana del trapezi $ABCD$.

$$\overline{FE} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} = \frac{17 - \overline{AD}}{2}$$

$$\overline{AF} = \frac{\overline{AD}}{2}$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AFE}$:

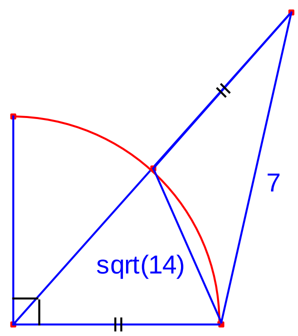
$$6.5^2 = \left(\frac{\overline{AD}}{2}\right)^2 + \left(\frac{17 - \overline{AD}}{2}\right)^2$$

$$\overline{AD}^2 - 17 \cdot \overline{AD} + 60 = 0$$

Resolent l'equació:
$\overline{AD} = 12,5$
En tots dos casos:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{AD} = \frac{17 - \overline{AD}}{2} \cdot \overline{AD} = 30$$

3606.- Calculeu el radi del quadrant de la figura.



Solució:

Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = r$

$\overline{OA} = \overline{OC} = \overline{CD} = r$

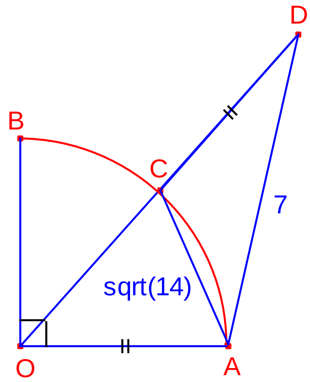
$\overline{AC} = \sqrt{14}$ és mitjana del triangle $\overset{\Delta}{OAD}$:

$$\sqrt{14} = \frac{\sqrt{2 \cdot r^2 + 2 \cdot 7^2 - 2 \cdot (2r)^2}}{2}$$

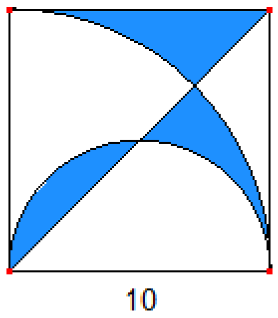
Elevant al quadrat i simplificant:

$r^2 = 21$

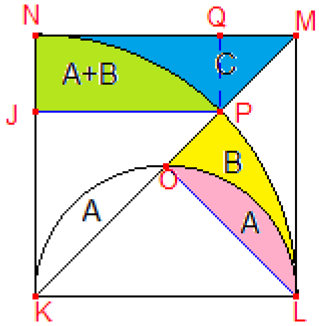
$r = \sqrt{21}$



3607.- El quadrat de la figura té costat 10.
Calculeu l'àrea ombrejada.

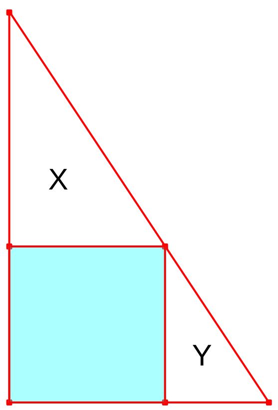


Solució:
Siga el quadrat $KLMN$ de centre O i de costat $\overline{KL} = 10$
Siga el semicercle de diàmetre $\overline{KL} = 10$
Siga el quadrant de centre K i radi $\overline{KL} = 10$
$\overline{KO} = \overline{LO} = 5\sqrt{2}$
$\overline{KM} = 10\sqrt{2}$

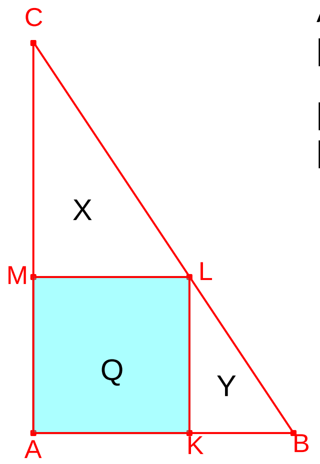


L'àrea ombrejada és igual a $A + B + C$
Siga J la projecció de P sobre $\overline{KN}$
L'àrea és igual a l'àrea del trapezi rectangle $JPMN$
Siga Q la projecció de P sobre $\overline{NM}$
$\overline{MP} = 10\sqrt{2} - 10$
$\overline{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{MP} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(10\sqrt{2} - 10\right) = 10 - 5\sqrt{2}$
$\overline{JP} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{KP} = 5\sqrt{2}$
L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = S_{JPMN} = \frac{10 + 5\sqrt{2}}{2}\left(10 - 5\sqrt{2}\right) = 25$

3608.- Un quadrat està inscrit en un triangle l’àrea dels triangles exteriors al quadrat són X, Y.
Calculeu l’àrea del quadrat



Solució:



ABCD quadrat

AK=d

$[ABCD]=Q=d^2$

$[KBL]=d(c-d)=2Y$

$[CML]d(b-d)=2X$

$d^2(c-d)(b-d)=4XY$

$d^2(bc-(b+c)d+d^2=4XY$

$2\cdot[ALC]=bd=2X+Q$

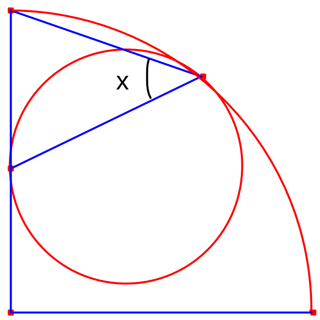
$2\cdot[ALB]=cd=2Y+Q$

$d(b+c)=2(X+Y+Q)=bc$

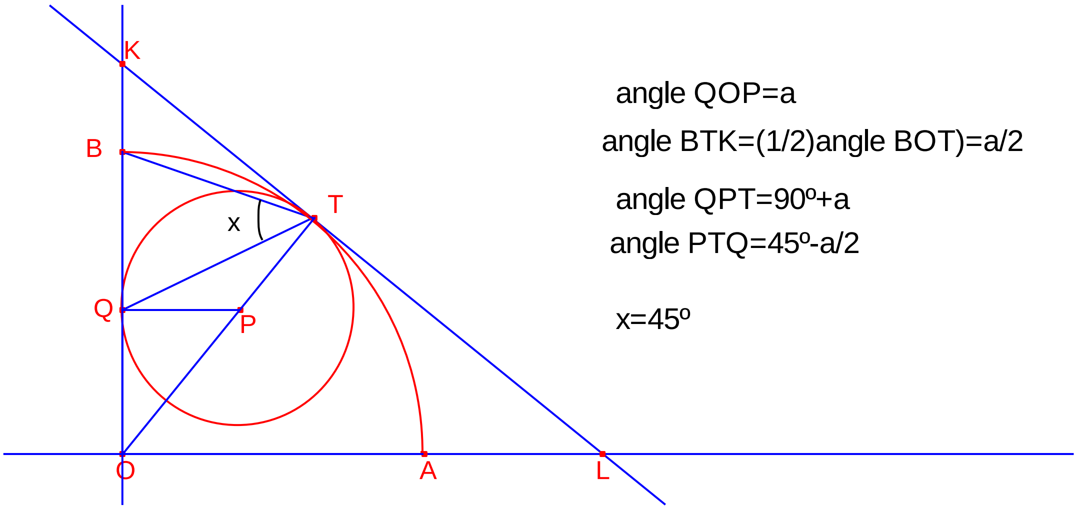
$d^2\cdot d^2=4XY$

$d^2=2\cdot\mathrm{sqrt}(XY)$

3609.- En un quadrant s'ha inscrit una circumferència.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



angle QOP=a

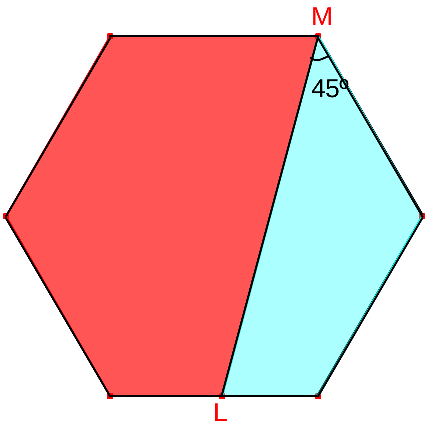
angle BTK=(1/2)angle BOT)=a/2

angle QPT=90º+a

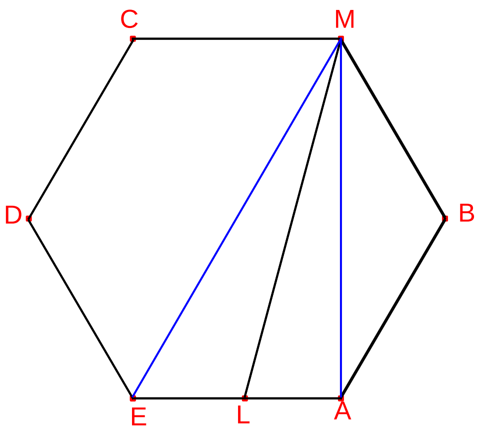
angle PTQ=45º-a/2

x=45º

3610.- La diferencia entre les àrees dels pentàgon i el quadrilàter en què es dividit l'hexàgon regular pel segment $\overline{LM}$ és $16\sqrt{3}$
Calculeu la mesura del segment $\overline{LM}$



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABMCDE$ de costat $\overline{AB} = c$
$\overline{ME} = 2c, \overline{MA} = c\sqrt{3}$
Siga $\angle LMB = 45°$
$\angle EMB = 60°, \angle AMB = 30°$
$\angle EML = \angle LMA = 15°$



Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle $\overset{\Delta}{EMA}$:
$$\frac{\overline{LA}}{c\sqrt{3}} = \frac{c - \overline{LA}}{2c}$$
$\overline{LA} = \left(2\sqrt{3} - 3\right)c, \overline{EL} = \left(4 - 2\sqrt{3}\right)c$
Siga S l'àrea de l'hexàgon regular $ABMCDE$
$$S = 6\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$
La diferencia entre les àrees dels pentàgon $ELMCD$ i el quadrilàter $EABM$ en què es dividit l'hexàgon regular pel segment $\overline{LM}$ és $16\sqrt{3}$
:
$$\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}\overline{EL}\cdot\overline{AM} - \left(\frac{1}{6}S + \frac{1}{2}\overline{LA}\cdot\overline{AM}\right) = 16\sqrt{3}$$
$$\frac{1}{3}S + \frac{1}{2}\left(\overline{EL} - \overline{AL}\right)\overline{AM} = 16\sqrt{3}$$
$$\frac{1}{3}6\frac{\sqrt{3}}{4}c^2 + \frac{1}{2}\left(7 - 4\sqrt{3}\right)\sqrt{3}c^2 = 16\sqrt{3}$$
Simplificant:
$$\left(4\sqrt{3} - 6\right)c^2 = 16\sqrt{3}$$
$$c^2 = 8\left(2 + \sqrt{3}\right)$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LAM}$:
$$\overline{LM}^2 = \left(\left(4 - 2\sqrt{3}\right)c\right)^2 + \left(c\sqrt{3}\right)^2$$
$$\overline{LM}^2 = \left(24 - 12\sqrt{3}\right)c^2 = 96$$
$$\overline{LM} = 4\sqrt{6}$$