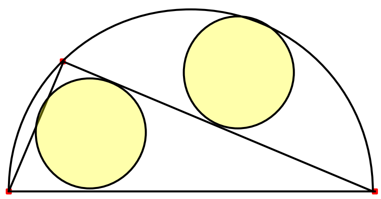
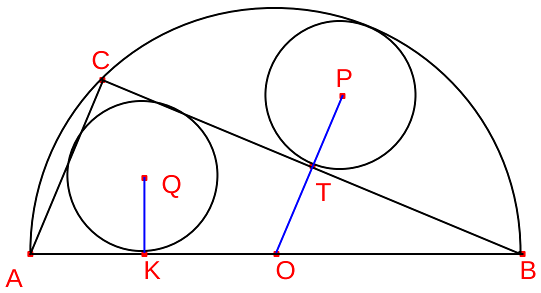
3611.- En una semicircumferència s'ha dibuixat un triangle i dos cercles iguals, un inscrit al triangle i l'altre tangent al semicercle i a un costat del triangle. Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del semicercle.



Solució:



Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, C = 90°$

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = r$

Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QK} = r$

T és el punt mig de la corda $\overline{BC}$

$\overline{OT}$ perpendicular a la corda $\overline{BC}$

$\overline{OT} = R - 2r$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{OBT}$ són semblants i de raó $2 : 1$

$\overline{AC} = 2 \cdot \overline{OT} = 2R - 4r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{BC} = 4\sqrt{-r^2 + rR}$

La circumferència de centre Q èstà inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$r = \frac{2R - 4r + 4\sqrt{-r^2 + rR} - 2R}{2}$$

$r = -2r + 2\sqrt{-r^2 + rR}$

$3r = 2\sqrt{-r^2 + rR}$

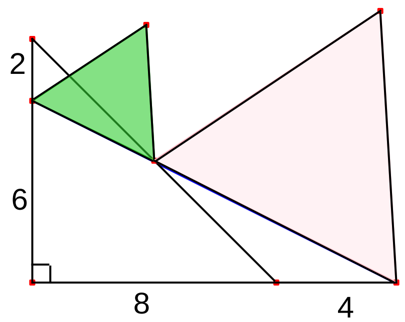
Resolent l'equació:

$$r = \frac{4}{13}R$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{2 \cdot r^2}{\frac{1}{2}R^2} = \frac{2 \cdot \frac{16}{169}}{\frac{1}{2}} = \frac{64}{169}$$

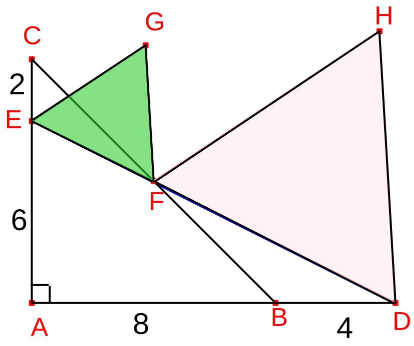
3612.- En la figura, calculeu la proporció entre les àrees dels dos triangles equilàters ombrejats.



Solució:

Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = \overline{AC} = 8, \angle ABC = \angle ACB = 45°$
$\angle FBD = 135°$

Siga $\alpha = \angle ADE$
Siguen $\overline{DF} = x, \overline{EF} = y$
$\angle BFD = \angle EFC = 45° - \alpha$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BDF}$:

$$\frac{4}{\sin{(45° - \alpha)}} = \frac{x}{\sin 135°}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{EFC}$:

$$\frac{2}{\sin{(45° - \alpha)}} = \frac{y}{\sin 45°}$$

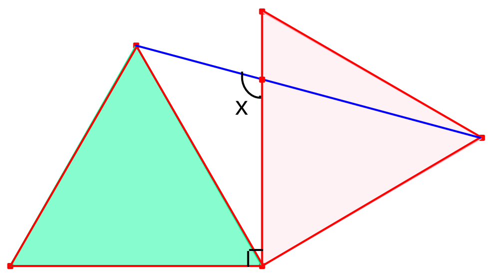
Dividint les dues expressions:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

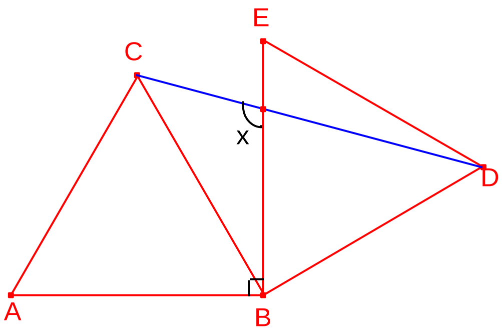
La proporció entre les àrees dels dos triangles equilàters és:

$$\frac{S_{EFC}}{S_{BDF}} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

3613.- En la figura, els dos triangles ombrejats són iguals i equilàters.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



angleCBE=30º

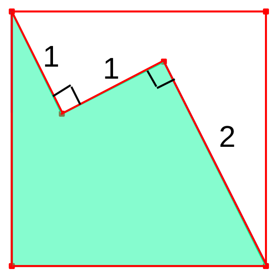
angle CBD=90º

BC=BD

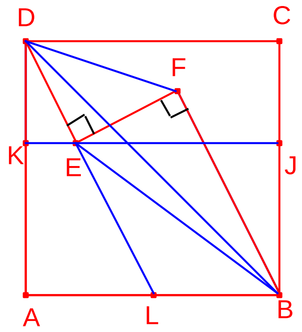
angle BCD=45º

x=105º

3614.- En la figura calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea de quadrat exterior.



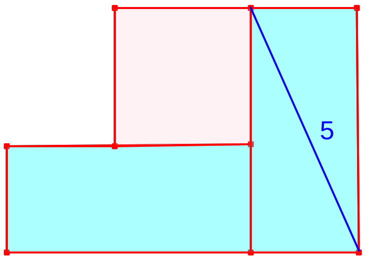
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siguen $\overline{DE} = \overline{EF} = 1, \overline{BF} = 2$
$\overline{DF} = \sqrt{2}, \overline{BE} = 5. \overline{BD} = c\sqrt{2}, \angle DFB = 135°$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{DFB}$:



$$2c^2 = 4 + 2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$c = \sqrt{5}$$

Siga $\angle KDE = \angle FBC = \alpha$
$\cos\alpha = a, \sin\alpha = \sqrt{1 - a^2}$
Siga $\overline{DK} = a$
Siga $\angle EBF = \beta$
$$\cos\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BJE}$:
$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{5} - a}{\sqrt{5}} = a\frac{2}{\sqrt{5}} - \sqrt{1 - a^2}\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$5a^2 - 3\sqrt{5}a + 2 = 0$$
Resolent l'equació:
$$a = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$\tan\alpha = \frac{1}{2}$$
L'àrea ombrejada és:
$$S_{ABFED} = S_{KED} + S_{BFE} + S_{ABEK}$$
$$S_{ABFED} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{2}a\right)(c - a) = \frac{1}{5} + 1 + \frac{9}{5} = 3$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ABFED}}{S_{ABCD}} = \frac{3}{5}$$

3615.- La figura està formada per dos rectangles iguals de diagonal 5 i un quadrat. Calculeu l'àrea total de la figura.



Solució:

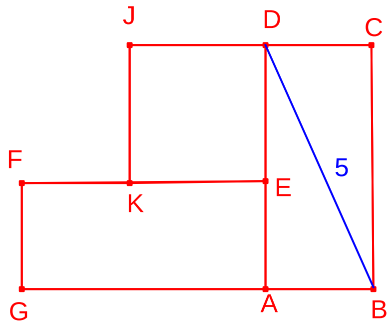
Siguen els rectangles $ABCD, AEFG$ de costats $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b$

$a^2 + b^2 = 25$

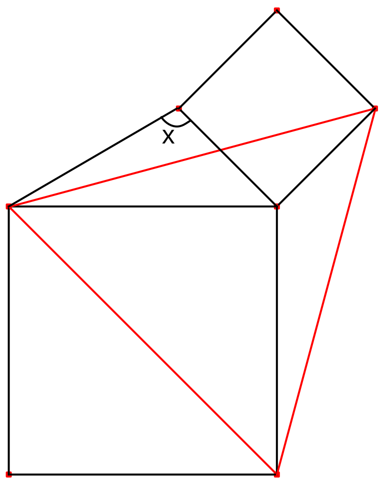
Siga el quadrat $JKED$ de costat $\overline{DE} = b - a$

L'àrea total és:

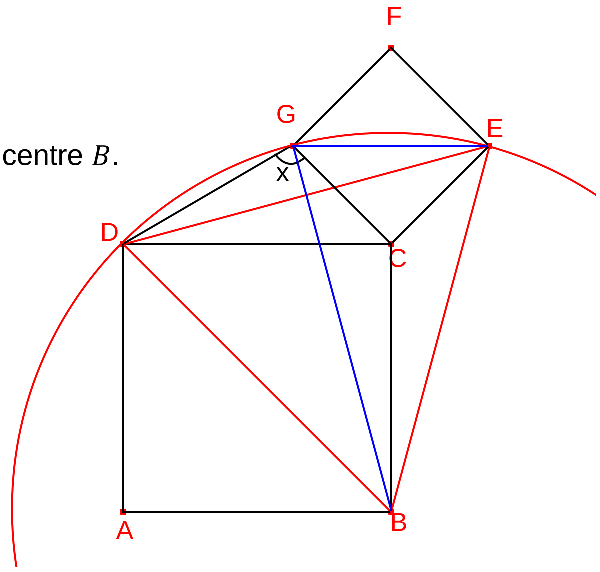
$S_{total} = 2 \cdot S_{ABCD} + S_{JKED} = 2ab + (b-a)^2 = a^2 + b^2 = 25$



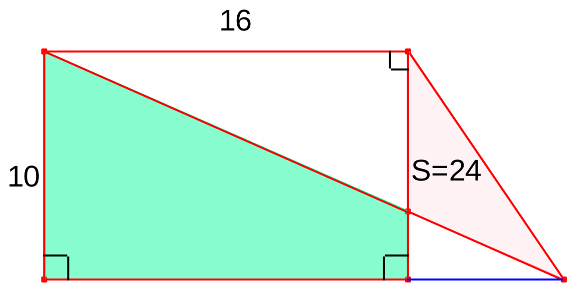
3616.- La figura està formada per dos quadrats i un triangle equilàter.
Determineu la mesura de l'angle x



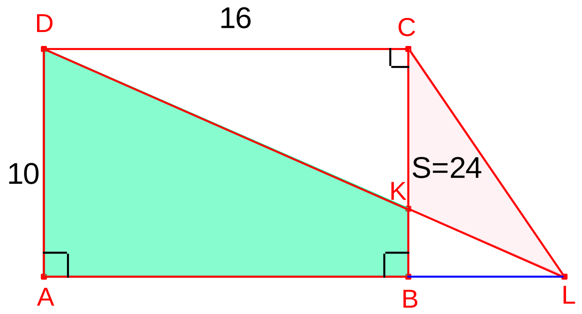
Solució:
Siguen els quadrats $ABCD, CEFG$.
$\angle DEC = 15°$
Els triangles $\overset{\Delta}{DCE}, \overset{\Delta}{BCG}$ són iguals (CAC)
Aleshores, $\overline{BG} = \overline{DE} = \overline{BD}$
$\angle GBC = 15°$
Els punts D, G, E pertanyen a la circumferència de centre B.
$\angle DBE = 60°$
Aleshores, $\angle DGE = \frac{1}{2}(360° - 60°) = 150°$
$\angle CGE = 45°$
Aleshores, $x = \angle DGC = 150° - 45° = 105°$



3617.- La figura està formada per un rectangle de costats 16 i 10.
El triangle ombrejat té àrea 24.
Calculeu l'àrea del quadrilàter ombrejat.



Solució:



Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 16, \overline{AD} = 10$
Siguen $\overline{BL} = a, \overline{BK} = b$
Siga $S = S_{KLC} = 24$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DCK}, \overset{\Delta}{LBK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{16}{a} = \frac{10 - b}{b}$$

$$(10 - b)a = 16b$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KCL}$ és:

$$\frac{1}{2}(10 - b)a = 24$$

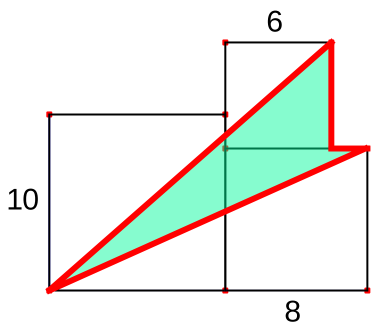
$$\frac{1}{2}16b = 24$$

$$b = 3$$

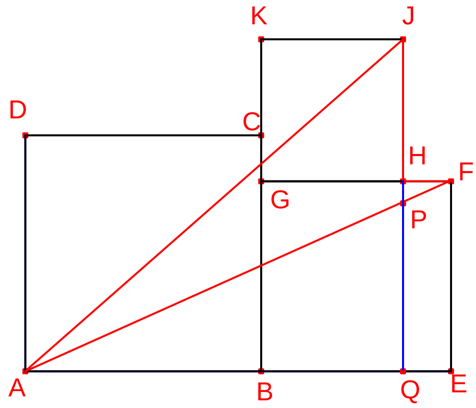
L'àrea del trapezi rectangle $ABKD$ és:

$$S_{ABKD} = \frac{10 + b}{2}16 = 104$$

3618.- La figura està formada per tres quadrats de costats 10, 8 i 6, respectivament.
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:



Siguen els quadrats $ABCD, BEFG, GHJK$ de costats 10, 8 i 6, respectivament.
Siga P la intersecció de les rectes HJ i AF.
Siga Q la intersecció de les rectes HJ i AE.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AQP}, \overset{\Delta}{AEF}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

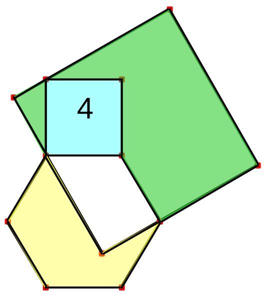
$$\frac{\overline{PQ}}{8} = \frac{16}{18}$$

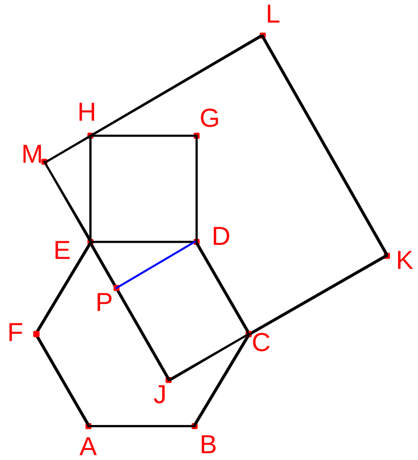
$$\overline{PQ} = \frac{64}{9}, \overline{HP} = \frac{8}{9}$$

L'àrea del quadrilàter ombrejat $AFHJ$ és:

$$S_{AFHJ} = S_{AQJ} - S_{AQP} + S_{HFP} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 14 - \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \frac{64}{9} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{8}{9} = 56$$

3619.- La figura està formada per un hexàgon regular i dos quadrats. El menut d'àrea 4.
Calculeu la diferència entre l'àrea verda i l'àrea groga.





Solució:
Siga el quadrat $DEHG$ de costat $\overline{DE} = 2$
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$.
Siga el quadrat $JKLM$.

Siga P la projecció de D sobre MJ.
$\overline{MH} = \overline{EP} = 1$
$\overline{ME} = \overline{PD} = \sqrt{3}$
$\overline{MJ} = 3 + \sqrt{3}$

L'àrea verda és:

$$S_{verda} = S_{JKLM} - S_{DEHG} - S_{EJCD} = \left(3 + \sqrt{3}\right)^2 - 4 - \frac{3+2}{2}\sqrt{3} = 8 + \frac{7}{2}\sqrt{3}$$

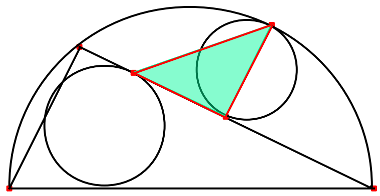
L'àrea groga és:

$$S_{groga} = S_{ABCDEF} - S_{EJCD} = 6\frac{\sqrt{3}}{4}2^2 - \frac{3+2}{2}\sqrt{3} = \frac{7}{2}\sqrt{3}$$

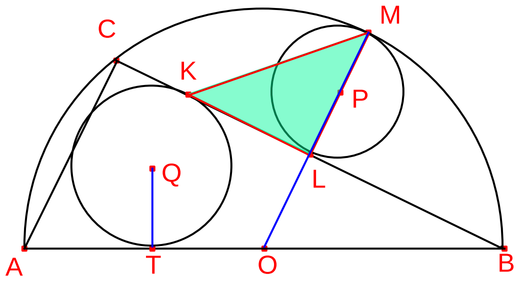
La diferència d'àrees és:

$$S_{verda} = S_{groga} = 8 + \frac{7}{2}\sqrt{3} - \frac{7}{2}\sqrt{3} = 8$$

3620.- La figura està formada per un semicercle que conté dos cercles i dos triangles.
El triangle ombrejat connecta tres punts de tangència.
Proveu que el triangle ombrejat és isòsceles.



Solució:



Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PL} = r$
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$
Siga el triangle rectangle ombrejat $\overset{\Delta}{KLM}, L = 90°$
$\overline{ML} = 2r$
$\overline{OL} = R - 2r$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBL}$:
$\overline{BL} = 2\sqrt{r^2 - rR}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{OBL}$ són semblants i de raó $2 : 1$
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{AC} = 2 \cdot \overline{OL} = 2R - 4r$
$\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BL} = 4\sqrt{r^2 - rR}$
El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$$s = \overline{CK} = \frac{\overline{AC} + \overline{BC} - \overline{AB}}{2} = \frac{2R - 4r + 4\sqrt{r^2 - rR} - 2R}{2} = -2r + 2\sqrt{r^2 - rR}$$
$\overline{KL} = 2\sqrt{r^2 - rR} - 2r + 2\sqrt{r^2 - rR} = 2r$
Aleshores, $\overline{KL} = \overline{LM}$