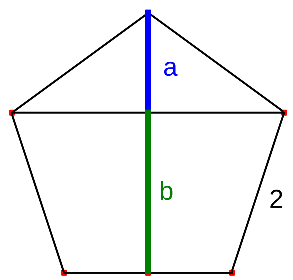
3631.- El costat del pentàgon regular és 2
Proveu que $a^2 + b^2 = 5$



Solució:
Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 2$

$\overline{CE} = 2\Phi = 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DJC}$:

$a^2 = 4 - \Phi^2 = 3 - \Phi$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{KBL}$:

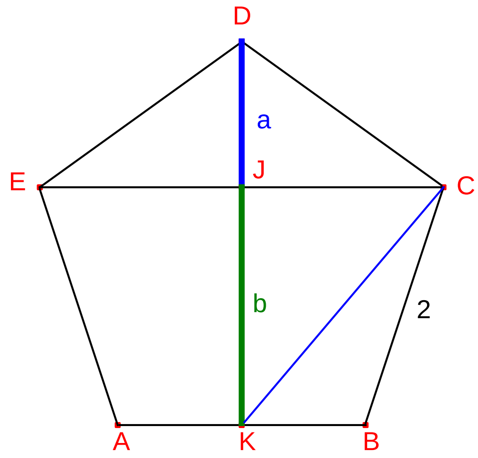
$\overline{KC}^2 = 1 + 4 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 72° = 5 + 4 \cdot \frac{1}{2\Phi} =$

$= 5 + 2(\Phi - 1) = 3 + 2\Phi$

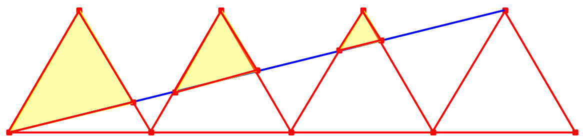
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KJC}$:

$b^2 = 3 + 2\Phi - \Phi^2 = 2 + \Phi$

$a^2 + b^2 = 3 - \Phi + 2 + \Phi = 5$



3632.- Els quatre triangles equilàters de la figura tenen cadascun àrea 6
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.

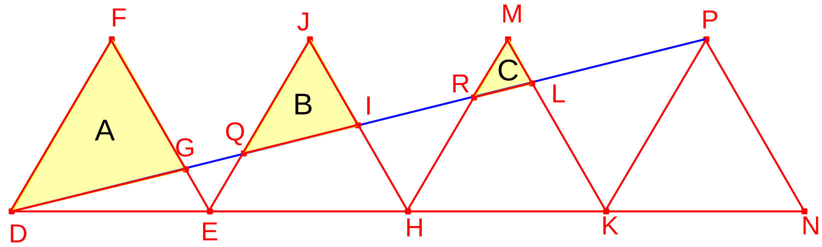


Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEF}$ d'àrea 6.

Els triangles $\overset{\Delta}{DEG}, \overset{\Delta}{DNP}$ són semblants i de raó $1:4$

$$\overline{GE} = \frac{1}{4}\overline{DE}$$



$$\overline{FG} = \frac{3}{4}\overline{DE}$$

$$\frac{S_{DGF}}{6} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$S_{DGF} = 6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{DEG}, \overset{\Delta}{DHI}$ són semblants i de raó $1:2$

$$\overline{HI} = \frac{1}{2}\overline{DE}$$

$$\overline{IJ} = \frac{1}{2}\overline{DE}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{DGF}, \overset{\Delta}{QIJ}$ són semblants i de raó $\overline{FG} : \overline{IJ} = 3:2$

$$\frac{S_{QIJ}}{S_{DGF}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$S_{QIJ} = \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2$$

Els triangles $\overset{\Delta}{DEG}, \overset{\Delta}{DKL}$ són semblants i de raó $1:3$

$$\overline{KL} = \frac{3}{4}\overline{DE}$$

$$\overline{ML} = \frac{1}{4}\overline{DE}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{DGF}, \overset{\Delta}{RLM}$ són semblants i de raó $\overline{FG} : \overline{LM} = 3:1$

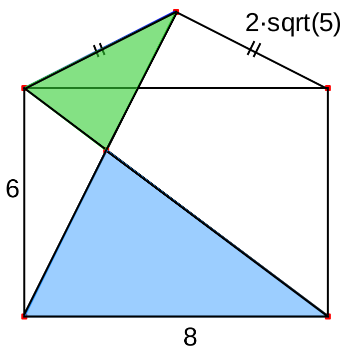
$$\frac{S_{RLM}}{S_{DGF}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$S_{QIJ} = \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

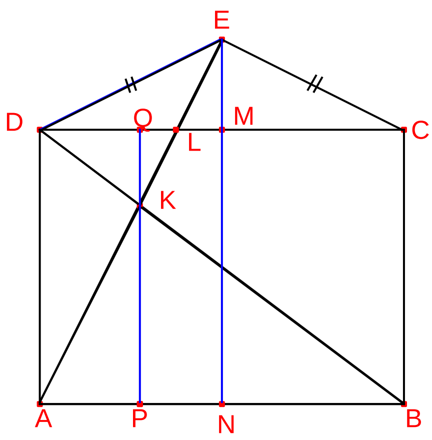
L'àrea ombrejada és:

$$S_{DGF} + S_{QIJ} + S_{QIJ} = \frac{9}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 7$$

3633.- Donat el rectangle de costats 8, 6, sobre el costat superior s'ha dibuixat dos segments iguals que mesuren cadascun, $2\sqrt{5}$
Calculeu la proporció entre els triangles ombrejats.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 8, \overline{AD} = 6$
Siga $\overline{DE} = \overline{CE} = 2\sqrt{5}$
Sigen M, N els punts migs dels costats $\overline{CD}, \overline{AB}$, respectivament.
Aplicant el teorema de PItàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CME}$:
$\overline{ME} = 2$
Siga K la intersecció dels segments $\overline{AE}, \overline{BD}$.
Siga L la intersecció dels segments $\overline{AE}, \overline{CD}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ANE}, \overset{\Delta}{LME}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{LM} = 1$
$\overline{DL} = 3$
Siguen P, Q les projeccions de K sobre els costat $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament.



Els triangles $\overset{\Delta}{DLK}, BAK$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PK}}{6 - \overline{PK}} = \frac{8}{3}$$

$$\overline{PK} = \frac{48}{11}$$

$$S_{BAK} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{48}{3} = \frac{192}{11}$$

$$S_{DLK} = \left(\frac{3}{8}\right)^2 S_{BAK} = \frac{27}{11}$$

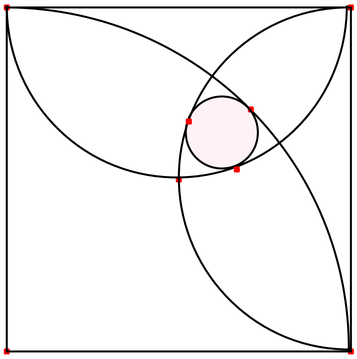
$$S_{DQE} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$$

$$S_{DKE} = S_{DQE} + S_{DLK} = 3 + \frac{27}{11} = \frac{60}{11}$$

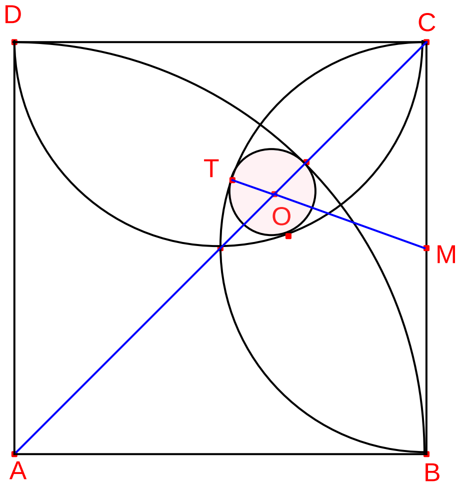
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{DKE}}{S_{BAK}} = \frac{\frac{60}{11}}{\frac{192}{11}} = \frac{5}{16}$$

3634.- En un quadrat de costat a s'han dibuixat dos semicircumferències i un quadrant i una circumferència tangent als tres arcs.
Calculeu el radi de la circumferència ombrejada.



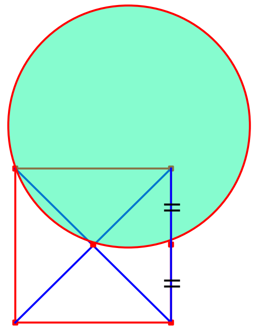
Solució:



Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$
Siga O el centre de la circumferència de radi $\overline{OT} = r$
$\angle OCM = 45°$
$\overline{OM} = r + (\sqrt{2} - 1)a, \overline{OM} = \frac{a}{2} - r, \overline{CM} = \frac{a}{2}$
aplicant el teorema del cosinus al triangle $O\overset{\Delta}{M}C$
$$\left(\frac{a}{2} - r\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(r + (\sqrt{2} - 1)a\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(r + (\sqrt{2} - 1)a\right)\frac{\sqrt{2}}{2}$$
Simplificant:
$$(4 - 3\sqrt{2})a^2 + (-2 + 3\sqrt{2})ar = 0$$
Resolent l'equació:
$$r = \frac{5 - 3\sqrt{2}}{7}a$$

3635.- La figura està formada per un quadrat de costat 4 i una circumferència.

Calculeu l'àrea del cercle.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 4$ i centre O.
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$

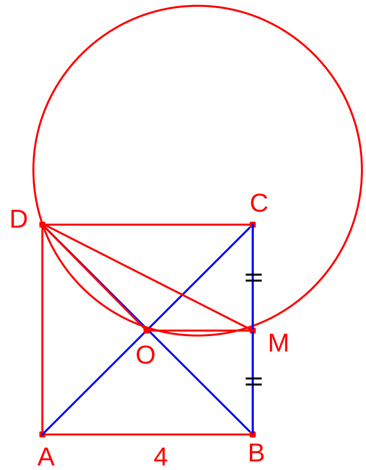
La circumferència està circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{OMD}$.
Siga R el radi de la circumferència.
$\overline{OD} = 2\sqrt{2}, \overline{OM} = 2, \overline{DM} = 2\sqrt{5}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OMD}$ és:

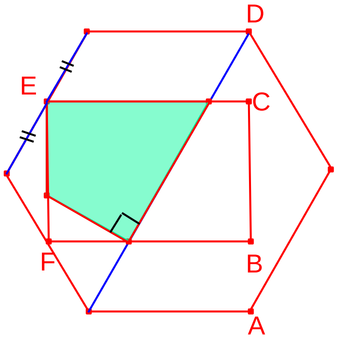
$$S_{OMD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OM} \cdot \overline{CD} = \frac{\overline{OD} \cdot \overline{OM} \cdot \overline{DM}}{4R}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{2\sqrt{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{5}}{4R}$$

Resolent l'equació:
$R = \sqrt{10}$
L'àrea del cercle és:
$S = \pi R^2 = 10\pi$



3636.- En la figura els punts A, B, C, D estan alienats.
$BCEF$ és un rectangle.
Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrilàter ombrejat i l'àrea del rectangle $BCEF$.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $AKDLMN$ de costat $\overline{AK} = c$

$\overline{DJ} = \overline{NH} = \frac{1}{2}c$

$\overline{HJ} = c$

$\overline{CJ} = \frac{1}{4}c$

$\overline{CJ} = \overline{DL} = c$

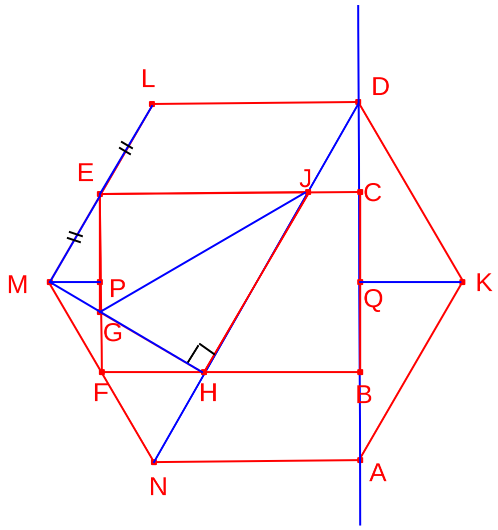
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{JEG}, \overset{\Delta}{JHG}$ són iguals.

$\angle EJP = 30°$

$\overline{EG} = \frac{\sqrt{3}}{3}c$

L'àrea del quadrilàter ombrejat $GHJE$ és:

$S_{GHJE} = \overline{EJ} \cdot \overline{EG} = \frac{\sqrt{3}}{3}c^2$



Siga P la projecció de M sobre $\overline{EF}$
Siga Q la projecció de K sobre $\overline{BC}$

$\overline{MP} = \frac{1}{4}c, \overline{QK} = \frac{1}{2}c$

$\overline{EF} = 2 \cdot \overline{EP} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{CE} = \overline{MK} - \overline{MP} - \overline{KQ} = 2c - \frac{1}{4}c - \frac{1}{2}c = \frac{5}{4}c$

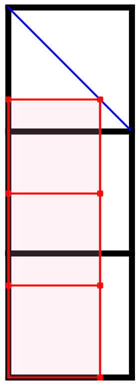
L'àrea del rectangle $BCEF$ és:

$S_{BCEF} = \overline{CE} \cdot \overline{EF} = \frac{5\sqrt{3}}{8}c^2$

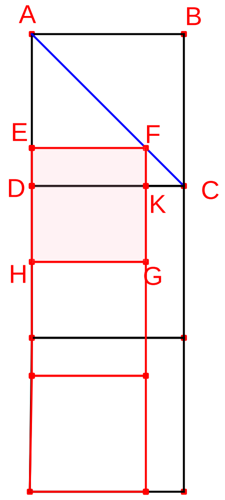
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{GHJE}}{S_{BCEF}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}c^2}{\frac{5\sqrt{3}}{8}c^2} = \frac{8}{15}$$

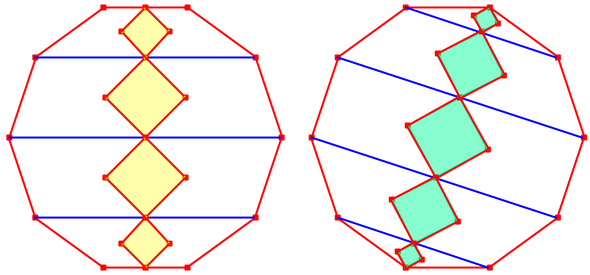
3637.- La figura està formada per tres quadrats negres i tres quadrats rojos.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total dels tres quadrats negres.



Solució:
Siga el quadrat negre $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga el quadrat roig $EFGH$ de costat $\overline{EF} = b$
Siga K la intersecció dels dos quadrats anteriors.
$\overline{AE} = 3a - 3b$
$\overline{AE} = \overline{EF}$
$3a - 3b = b$
$\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{ombrejada}}{S_{total}} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{9}{16}$



3638.- La figura està formada per dos decàgons regulars iguals.
En cadascun dels decàgons regulars s'ha dibuixat quadrats.
Calculeu la proporció entre l'àrea groga i l'àrea verda.

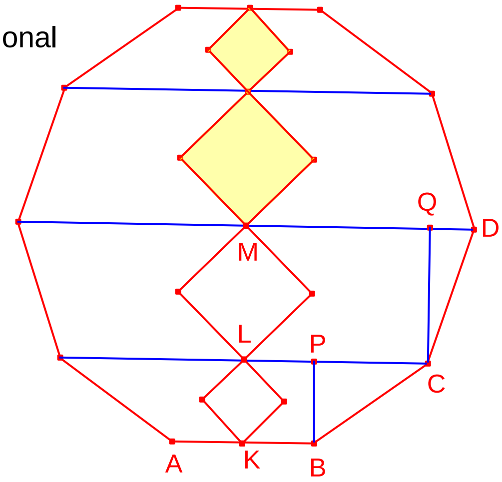


Solució:

$\cos 36° = \frac{\Phi}{2}, \sin 18° = \frac{1}{2\Phi}$

Siga el decàgon regular de costat $\overline{AB} = 1$

Siga $d_1 = \overline{KL}$ diagonal del quadrat menut. $d_2 = \overline{LM}$ diagonal del quadrat gran.



L'àrea del quadrat menut és $S_1 = \frac{1}{2}{d_1}^2$

L'àrea del quadrat gran és $S_2 = \frac{1}{2}{d_2}^2$

L'àrea groga és:

$S_{groga} = {d_1}^2 + {d_2}^2$

$\angle PBC = 54°, \angle QCD = 18°$

$d_1 = \cos 54°$

${d_1}^2 = \cos^2 54\,° = 1 - \cos^2 36\,° = 1 - \frac{\Phi^2}{4} = \frac{3-\Phi}{4}$

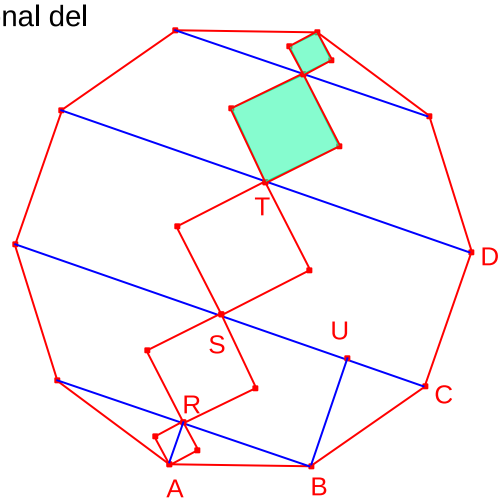
$d_2 = \cos 18°$

${d_2}^2 = \cos^2 18° = 1 - \sin^2 18° = 1 -= \frac{2+\Phi}{4}$

L'àrea groga és:

$S_{groga} = {d_1}^2 + {d_2}^2 = \frac{5}{4}$

Siga $e_1 = \overline{AR}$ diagonal del quadrat menut.$e_2 = \overline{RS}$ diagonal del quadrat mitjà,
Siga $e_3 = \overline{ST} = 1$ diagonal del quadrat gran
L'àrea de la zona verda és:



$S_{vera} = {e_1}^2 + {e_2}^2 + \frac{1}{2}e^3$

$\angle RAB = 72°, \angle UBC = 36°$

$e_1 = \cos 72° = \sin 18°$

${e_1}^2 = \sin^2 18\,° = \frac{1}{4\Phi^2} = \frac{2-\Phi}{4}$

$e_2 = \cos 36°$

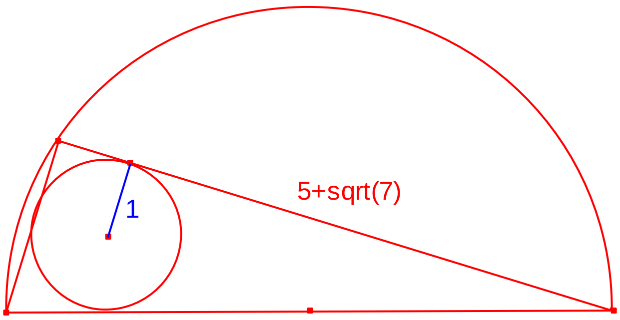
${e_2}^2 = \cos^2 36\,° = \frac{1+\Phi}{4}$

L'àrea de la zona verda és:

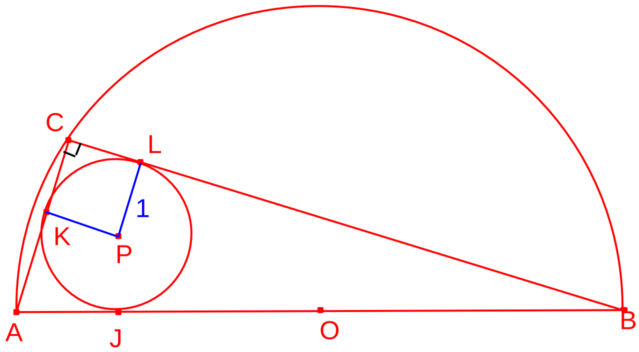
$S_{vera} = {e_1}^2 + {e_2}^2 + \frac{1}{2}e^2 = \frac{2-\Phi}{4} + \frac{1+\Phi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

Les dues àrees són iguals.

3639.- En la figura, calculeu el radi del semicercle.



Solució:



Siga el semicercle de diàmetre $\overline{AB} = 2R$

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, C = 90°, \overline{BC} = 5 + \sqrt{7}$

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PL} = 1$ inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$\overline{CL} = \overline{CK} = 1$

$\overline{BL} = \overline{BJ} = 4 + \sqrt{7}, \overline{AK} = \overline{AJ} = 2R - \left(4 + \sqrt{7}\right)$

$\overline{AC} = 2R - \left(3 + \sqrt{7}\right)$

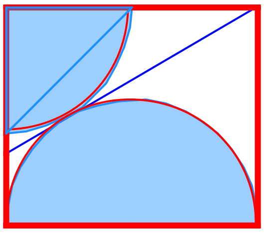
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$4R^2 = \left(5 + \sqrt{7}\right)^2 + \left(2R - \left(3 + \sqrt{7}\right)\right)^2$

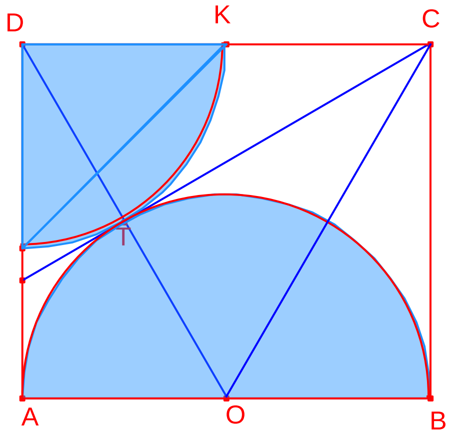
$\left(3 + \sqrt{7}\right)R = 12 + 4\sqrt{7}$

$R = 4$

3640.- Dins d'un rectangle s'han dibuixat un quadrant i un semicercle tangents.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del rectangle



Solució:



AB=2a

BC=b

DK=DT=r

Teorema Pitàgores DTC

$4a^2=b^2+r^2$

OD=OC

$a+r=\text{sqrt}(a^2+b^2)$

$r=a$, $b=a\cdot\text{sqrt}(3)$

Proporció:

$(r^2/4+a^2/2)\text{Pi}/(2ab)=\text{Pi}\cdot\text{sqrt}(3)/8$