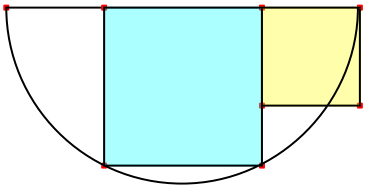
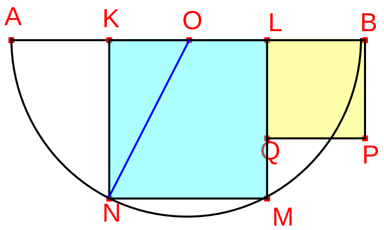
3641.- La figura està formada per un semicercle i dos quadrats.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos quadrats.



Solució:



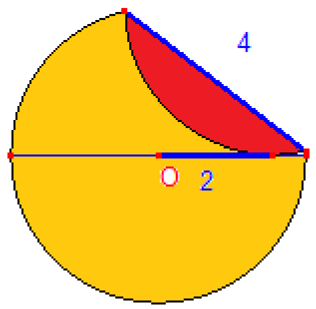
OA=R
KL=c, LB=d
d=R-c/2

teorema Pitàgores NKO

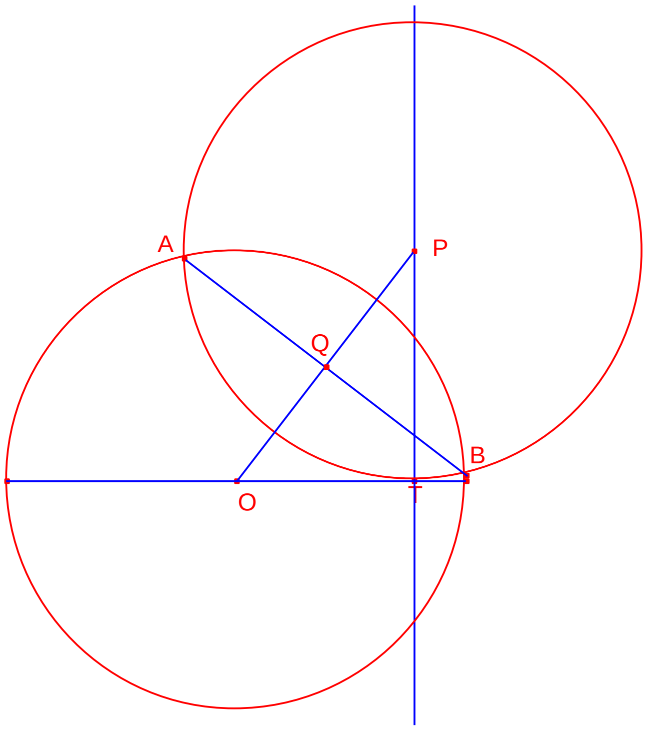
$c^2=(4/5)R^2$
$d^2=(6-2\sqrt{5})/2\cdot R^2$

Proporció:
$d^2/c^2=(3-\sqrt{5})/2$

3642.- Un cercle es doblega per una corda per tocar un diàmetre. El punt de tangència es troba a 2 del centre. Tenint en compte que el plec té una longitud 4, quina era l'àrea del cercle abans de plegar?



Solució:



OA=TR

AB=4, OT=2

teorema Pitàgores OQA

$OQ=sqrt(R^2-4)$

teorema Pitàgores OTP

$OP=sqrt(R^2+4)$

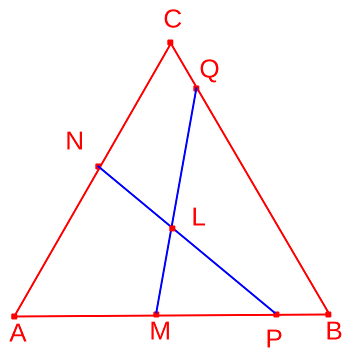
Terorema Pitàgores PQB

$R^2=4+(sqrt(R^2+4)-sqrt(R^2-4))^2$

$R^2=20/3$

àrea=20/3*PI

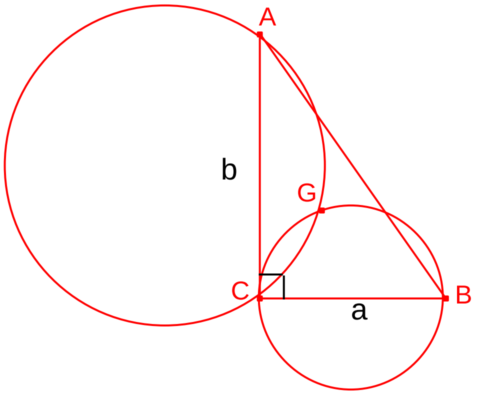
3643.- Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = a$.
Siguen els punts M, N, P i Q situats com mostra la figura, amb $\overline{MA} + \overline{AN} = \overline{PC} + \overline{CQ} = a$.
Determineu l'angle entre els segments $\overline{MQ}$ i $\overline{PN}$.



Solució:
$\overline{CN} = \overline{AM}, \overline{BP} = \overline{CQ}$
Aleshores, els quadrilàter $BCNP, CAMQ$ són iguals.

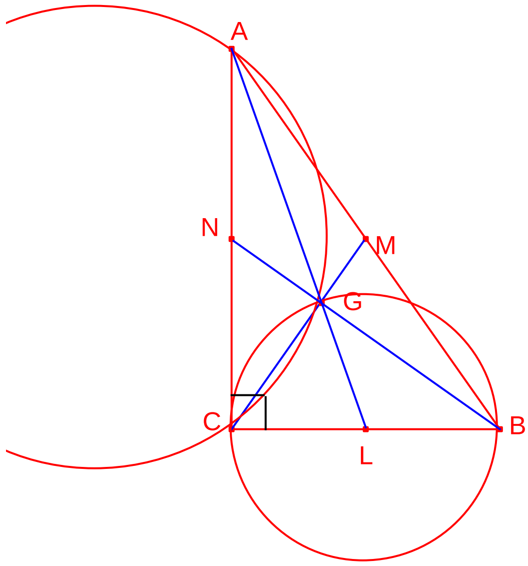
Siga $\angle MPN = \alpha$
$\angle NPB = \angle MQC = 180° - \alpha$
$\angle AMQ = 360° - (180° - \alpha + 60° + 60°) = 60° + \alpha$
$\angle LMP = 180° - (60° + \alpha) = 120° - \alpha$
$\angle MLP = 60°$

3644.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, C = 90°$ de baricentre G.
Siga R el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ACG}$
Siga r el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{CBG}$
Si $\frac{R}{r} = \sqrt{3}$, calculeu $\frac{b}{a}$



Solució:
En un triangle rectangle la mitjana sobre la hipotenusa mesura la meitat de la hipotenusa.

$$\overline{CM} = \frac{1}{2}c$$



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACG}$ és igual a la tercera part de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CBG}$ és igual a la tercera part de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{CG} = \frac{2}{3}\overline{CM} = \frac{1}{3}c$$

$$\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AL} = \frac{\sqrt{4b^2 + a^2}}{3}$$

$$\overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{BN} = \frac{\sqrt{b^2 + 4a^2}}{3}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACG}$ és:

$$S_{ACG} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}ab = \frac{b \cdot \frac{1}{3}c \cdot \frac{\sqrt{4b^2 + a^2}}{3}}{4R}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CBG}$ és:

$$S_{CBG} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}ab = \frac{a \cdot \frac{1}{3}c \cdot \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{3}}{4r}$$

Dividint les dues expressions:

$$\frac{R}{r} = \frac{b}{a}\frac{\sqrt{4b^2 + a^2}}{\sqrt{4a^2 + b^2}}$$

$$\sqrt{3} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{4\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1}{4 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}}$$

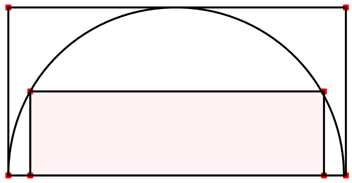
Elevant al quadrat i simplificant:

$$2\left(\frac{b}{a}\right)^4 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 6 = 0$$

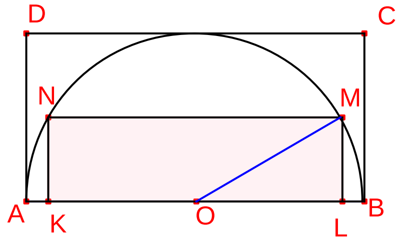
Resolent l'equació:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2}$$

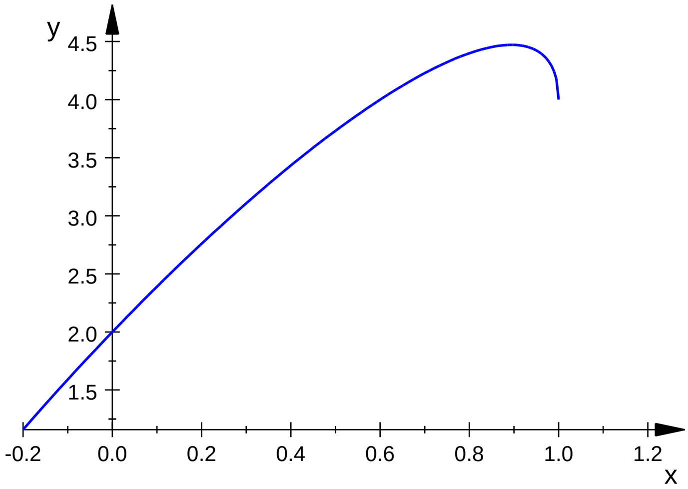
3645.- La figura està formada per una semicircumferència i dos rectangles.
El perímetre del rectangle ombrejat és el mínim de tots els rectangles inscrits en la semicircumferència.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos rectangles.



Solució:
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga el quadrat exterior $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 2R, \overline{AD} = R$
Siga $\overline{OL} = x$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OLM}$:
$\overline{LM} = \sqrt{R^2 - x^2}$



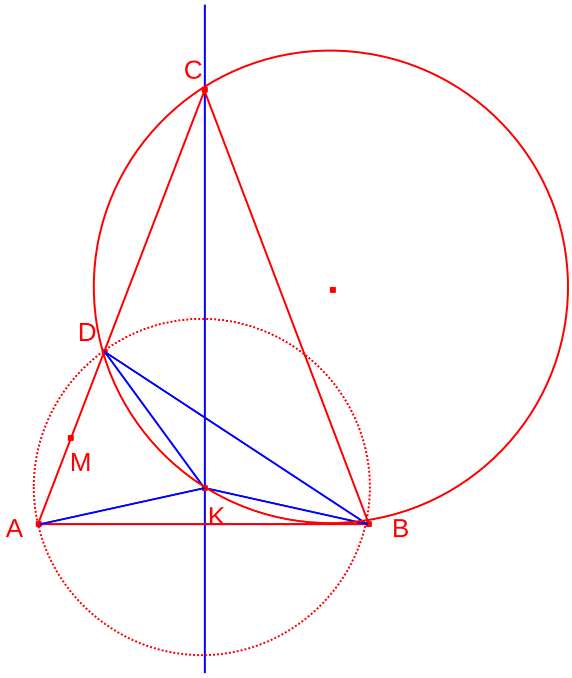
El perímetre del rectangle $KLMN$ és:
$p(x) = 4x + 2\sqrt{R^2 - x^2}, \qquad x \in [0, R]$
$p'(x) = 4 - \dfrac{2x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$
$p'(x) = 0$
$2\sqrt{R^2 - x^2} = x$
Resolent l'equació:
$x = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}R$
$p''\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}R\right) < 0$
$x = \frac{2\sqrt{5}}{5}R$ és el mínim dels perímetres.



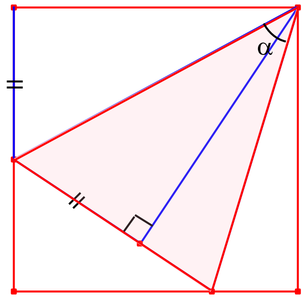
L'àrea del rectangle $KLMN$ és:
$S_{KLMN} = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$
l'àrea mínima és:
$S_{mín} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}R \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{5}R = \dfrac{4}{5}R^2$
La proporció d'àrees és:
$\dfrac{S_{mín}}{S_{ABCD}} = \dfrac{\frac{4}{5}R^2}{2R \cdot R} = \dfrac{2}{5}$

3646.- En un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AC} = \overline{BC}$, D és un punt interior del costat $\overline{AC}$ i K és el centre de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$.
Demostreu que el quadrilàter $BCDK$ és cíclic.
KöMaL, B5175

Solució:
Siga $\angle ACK = \alpha$
Siga $\angle AKD = 2\beta$
$\angle ABD = \beta$
$\angle CAB = 90° - \alpha, \angle AKM = 90° - \beta$
$\angle KAB = \angle KBA = \beta - \alpha$
$\angle KBD = \beta - (\beta - \alpha) = \alpha$
Aleshores,
$\angle DCK = \angle KBD = \alpha$
Aleshores, el quadrilàter $BCDK$ és cíclic.



3647.- Calculeu la mesura de l'angle α del triangle ombrejat inscrit en el quadrat



Solució:

Siga el quadrat $ABCD$.

Siga el triangle $\overset{\Delta}{EFC}, \alpha = \angle ECF$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DEC}, \overset{\Delta}{HEC}$ són iguals (CCC)

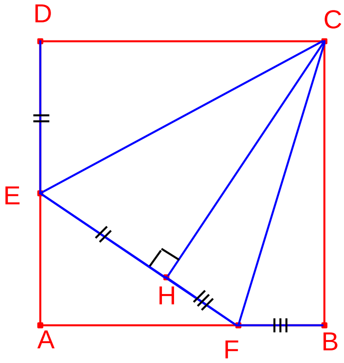
$\overline{CH} = \overline{CD}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{HFC}, \overset{\Delta}{BFC}$ són iguals (CAC)

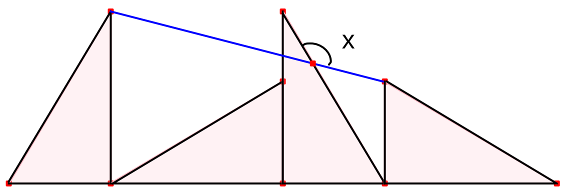
Siga $\beta = \angle DCE = \angle ECH, \gamma = \angle HCF = \angle BCF$

$2\beta + 2\gamma = 90°$

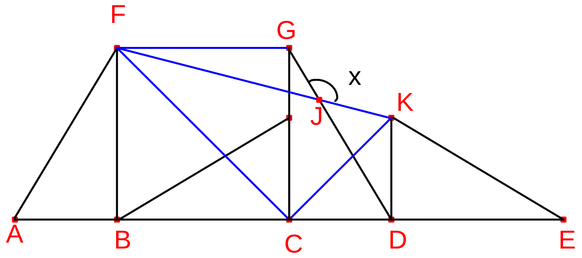
$\alpha = \beta + \gamma = 45°$



3648.- La figura està formada per quatre triangles rectangles iguals.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



Siga $\angle CGD = \angle DEK = \alpha$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABF}, \overset{\Delta}{KCF}$ són semblants i de raó $1 : \sqrt{2}$

$\angle CKF = 90° - \alpha$

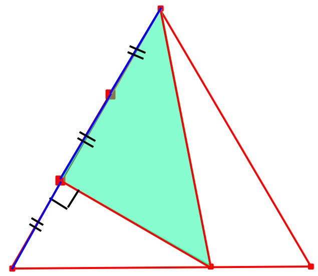
$\angle GDK = \alpha$

$\angle CKD = 45°$

$\angle CKF = 90° - \alpha + 45° = 135° - \alpha$

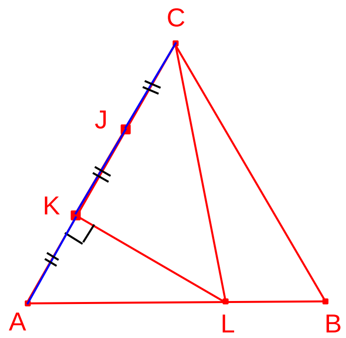
$x = \angle GJK = \alpha + 135° - \alpha = 135°$

3649.- Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle ombrejat i l'àrea del triangle equilàter exterior.

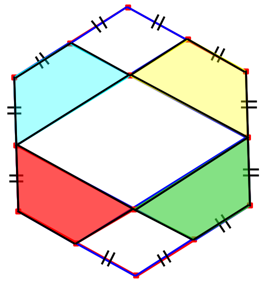


Solució:

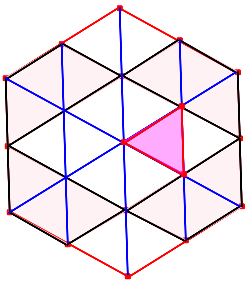
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 3a$
Siguen $\overline{AK} = a, \overline{CK} = 2a$
$\overline{AL} = 2 \cdot \overline{AK} = 2a, \overline{BL} = a$
Siga $P = S_{AKL}$
$S_{CKL} = 2 \cdot S_{AKL} = 2P$
$S_{ALC} = 3P$
$S_{ABC} = \frac{3}{2} \cdot S_{ALC} = \frac{9}{2}P$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{CKL}}{S_{ABC}} = \frac{2P}{\frac{9}{2}P} = \frac{4}{9}$



3650.- Calculeu la proporció entre l’àrea ombrejada i l’àrea de l’hexàgon regular.



Solució:



1/2