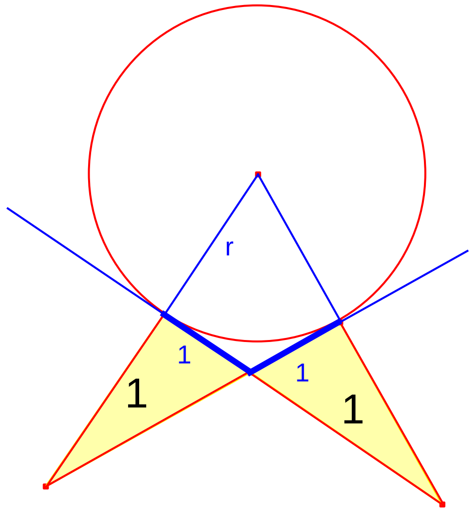
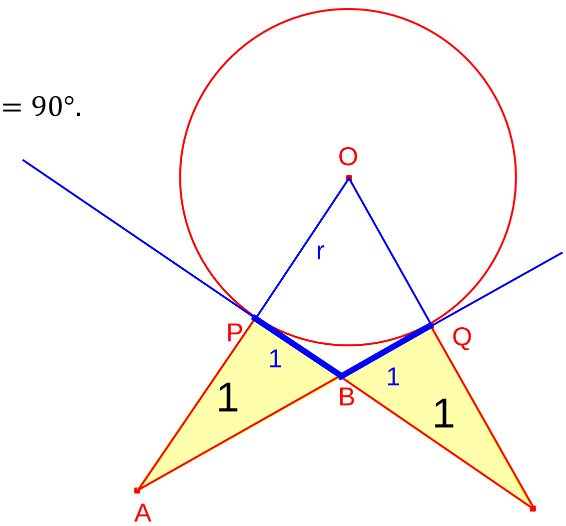
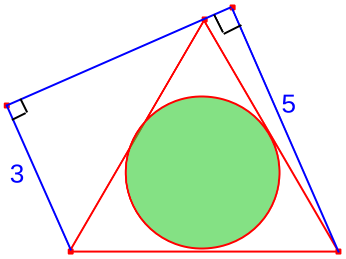
3651.- En la figura, els dos triangles ombrejats tenen àrea 1 i dos costats que mesuren 1.
Calculeu el radi de la circumferència.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OP} = r$
Siga el triangle $\overset{\Delta}{APB}, \overline{PB} = 1$, d'àrea 1.
$\overline{PB}$ és tangent a la circumferència, aleshores, $\angle APB = 90°$.
$\overline{AP} = 2$
$\overline{AB} = \sqrt{5}$
Aplicant la potència del punt A respecte de la circumferència.
$2(2+2r) = \left(\sqrt{5}+1\right)^2$
Resolent l'equació:
$r = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

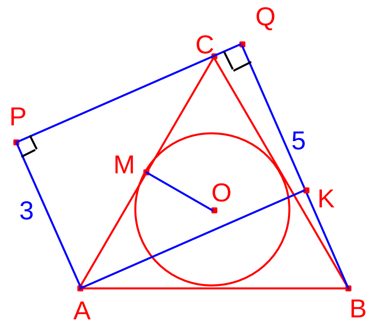


3652.- Calculeu l'àrea del cercle inscrit en el triangle equilàter de la figura.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AC}$
Siga O el centre de la circumferència inscrita al triangle equilàter de radi $\overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{6}c$



Soga K la projecció del punt A sobre $\overline{BQ} = 5$
$\overline{QK} = \overline{AP} = 3, \overline{BK} = 2$
Aplicant el teorema de Pitpagores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{APC}, \overset{\Delta}{BQC}$:

$\overline{PC} = \sqrt{c^2 - 9}, \overline{QC} = \sqrt{c^2 - 25}$

$\overline{AK} = \overline{PQ} = \sqrt{c^2 - 9} + \sqrt{c^2 - 25}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKB}$:

$c^2 = 4 + \left(\sqrt{c^2 - 9} + \sqrt{c^2 - 25}\right)^2$

Simplificant:

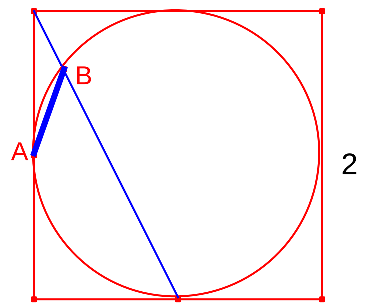
$3c^2 + 76 = 0$

$c^2 = \frac{76}{3}$

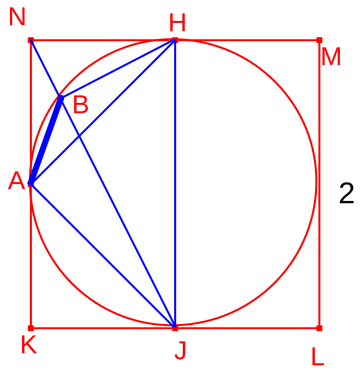
L'àrea del cercle és:

$S = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}c\right)^2 = \pi\frac{1}{12}\frac{76}{3} = \frac{19}{9}\pi$

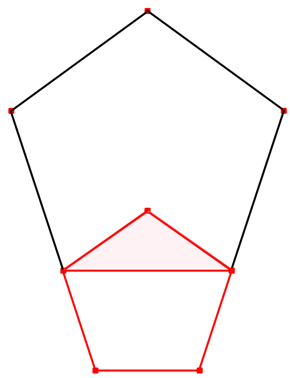
3653.- Donat un quadrat de costat 2 i la seua circumferència inscrita.
Calculeu la mesura del segment $\overline{AB}$



Solució:
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = 2$
$\overline{NJ} = \sqrt{5}$
Aplicant la potència del punt N respecte de la circumferència:
$\overline{NB} \cdot \overline{NJ} = \overline{NA}^2$
$\overline{NB} \cdot \sqrt{5} = 1$
$\overline{NB} = \frac{\sqrt{5}}{5}$
$\overline{BJ} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$
$\overline{AH} = \overline{AJ} = \sqrt{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JBH}$:
$\overline{BH} = \sqrt{4 - \frac{16}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
El quadrilàter $ABHJ$ està inscrit en la circumferència.
Aplicant el teorema de Tolomeu:
$\overline{AB} \cdot \overline{JH} + \overline{BH} \cdot \overline{AJ} = \overline{AH} \cdot \overline{BJ}$
$2 \cdot \overline{AB} + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5}$
$\overline{AB} = \frac{\sqrt{10}}{5}$



3654.- La figura està formada per dos pentàgons regulars superposats que tenen dos vèrtexs comuns.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle ombrejat i el total de l'àrea de la figura.



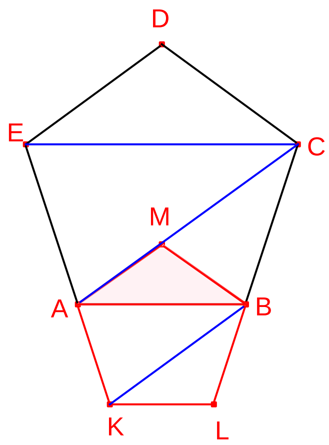
Solució:
Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 1$

$$\overline{AB} = \overline{CE} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\angle ECD = \angle ECA = \angle ACB = 36°$$

Siga el pentàgon regular $KLBML$ de costat $\overline{KL} = \frac{i}{\Phi}$

$$\angle MBA = \angle ABK = \angle KBL = 36°$$



L'àrea del triangle ombrejat $\overset{\Delta}{ABM}$ és:

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\Phi} \cdot \sin 36° = \frac{1}{2}\frac{1}{\Phi} \sin 36°$$

L'àrea total és:

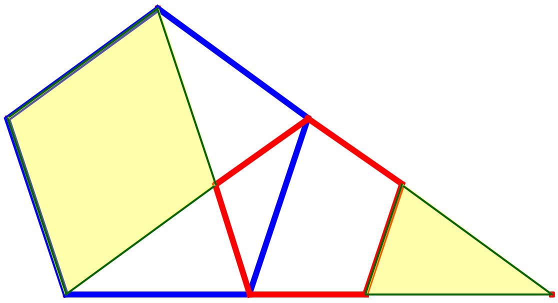
$$S_{KLCDE} = \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \Phi + \frac{1}{2} \cdot \Phi \cdot \Phi + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\right) \sin 36° =$$

$$= \left(\Phi + \frac{1}{2}\Phi^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\Phi} + \frac{1}{2}\right) \sin 36°$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{KLCDE}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\Phi}}{\Phi + \frac{1}{2}\Phi^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\Phi} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4+5\Phi} = \frac{13-5\sqrt{5}}{22}$$

3655.- La figura està formada per dos pentàgons regulars superposats que tenen dos vèrtexs comuns.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i el total de l'àrea de la figura.



Solució:
Siga el pentàgon regular $KLBML$ de costat $\overline{KL} = 1$

$\overline{BC} = \overline{CK} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

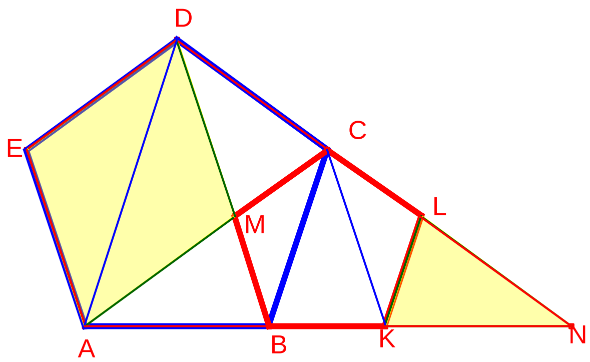
$\overline{LN} = \overline{KN} = \Phi$

$\angle MCB = \angle BCK = \angle KCL = 36°$

Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = \Phi$

$\overline{AD} = \overline{BD} = \Phi^2$

$\angle EDA = \angle ADB = \angle BDC = 36°$



L'àrea ombrejada és:

$$2 \cdot S_{AED} + S_{KNL} = \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Phi \cdot \Phi^2 + \frac{1}{2} \cdot \Phi \cdot \Phi\right) \sin 36° = \left(\Phi^3 + \frac{1}{2}\Phi^2\right) \sin 36°$$

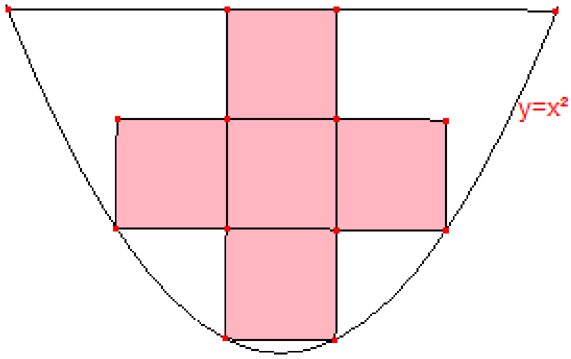
L'àrea total és:

$$S_{ANDE} = \left(\Phi^3 + \frac{1}{2}\Phi^4 + \Phi^2 + \frac{1}{2}\Phi\right) \sin 36°$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{2 \cdot S_{AED} + S_{KNL}}{S_{ANDE}} = \frac{\Phi^3 + \frac{1}{2}\Phi^2}{\Phi^3 + \frac{1}{2}\Phi^4 + \Phi^2 + \frac{1}{2}\Phi} = \frac{3\Phi + 2}{6\Phi + 4} = \frac{1}{2}$$

3656.- En un segment de paràbola $y = x^2$ s'han inscrit cinc quadrats iguals. Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del segment parabòlic.



Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2a$

L'àrea ombrejada és:

$S_{ambrejada} = 5 \cdot (2a)^2 = 20a^2$

Siga $\overline{VP} = a$.

$\overline{BP} = a^2$

$\overline{VQ} = 3a$

$\overline{QE} = 9a^2$

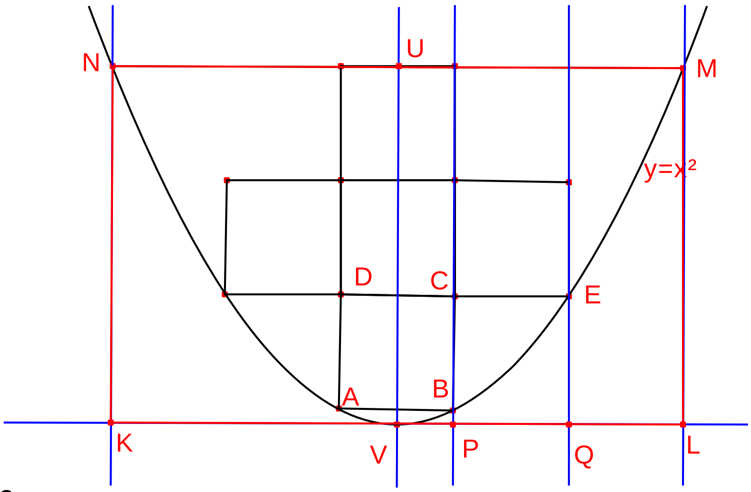
$\overline{QE} = \overline{PC} = a^2 + 2a$

$9a^2 = a^2 + 2a$

Resolent l'equació:

$$a = \frac{1}{4}$$

L'àrea del segment parabòlic és igual a dues terceres parts de l'àrea del rectangle $KLMN$.



$\overline{VU} = \overline{LM} = 6a + a^2$

$\overline{VL} = \sqrt{6a + a^2}$

$\overline{KL} = 2 \cdot \overline{VL} = 2\sqrt{6a + a^2}$

L'àrea del segment parabòlic és:

$$S_{segmentParabòlic} = \frac{2}{3} 2\sqrt{6a + a^2} \cdot (6a + a^2)$$

Aleshores:

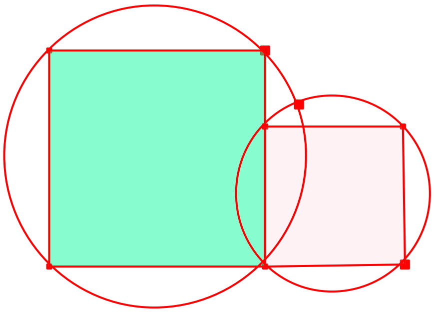
$$S_{ambrejada} = 20a^2 = \frac{5}{4}$$

$$S_{segmentParabòlic} = \frac{4}{3}\sqrt{6a + a^2} \cdot (6a + a^2) = \frac{125}{48}$$

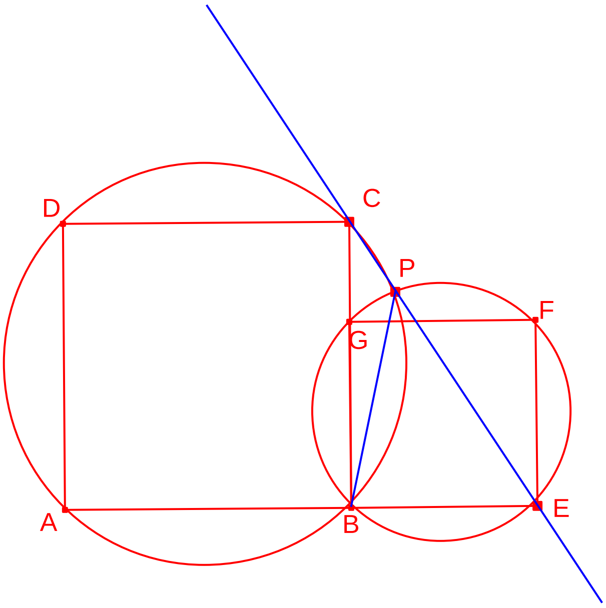
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ambrejada}}{S_{segmentParabòlic}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{125}{48}} = \frac{12}{25}$$

3657.- La figura està formada per dos quadrats adossats i les seues circumferències circumscrites.
Proveu que els tres punts senyalats estan alineats.



Solució:

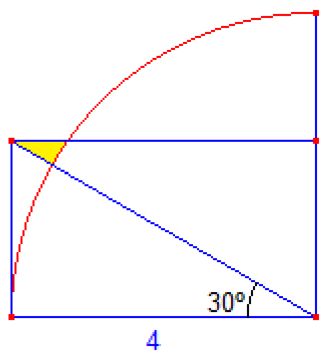


angleCPB=135º

angleBPE=45º

Els punts C, P, E estan alineats

3658.- La figura està formada per un quadrant de radi 4 i un rectangle.
Calculeu l’àrea de la zona ombrejada.



Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = 4$

$$\overline{AL} = \overline{PQ} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

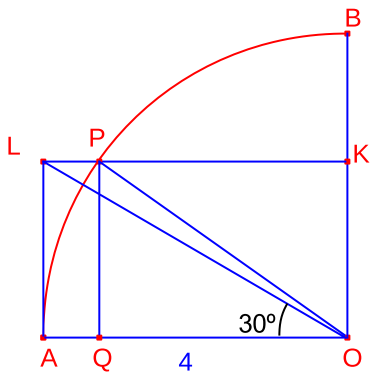
$$\overline{OQ} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$$\overline{AQ} = 4 - \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

Siga $\beta = \angle LOP$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \beta\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

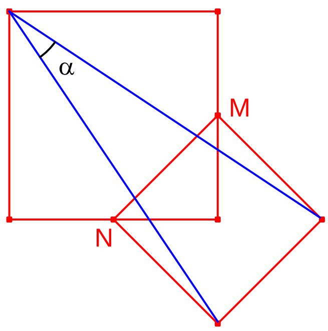
$$\beta = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6}$$



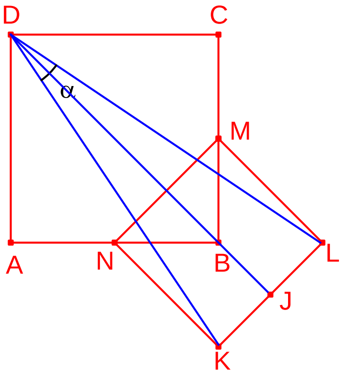
L’àrea ombrejada és igual a l’àrea del triangle $\overset{\Delta}{LPO}$ menys l’àrea del sector de centre O i angle β

$$S_{ombrejada} = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{4\sqrt{6}}{3}\right)\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}4^2\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \approx 0.112519$$

3659.- La figura està formada per dos quadrats.
M, N són els punts migs dels costats del quadrat gran.
Calculeu $\tan\alpha$



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB}=2$
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{MN}=\sqrt{2}$
Notem que B és el centre del quadrat $KLMN$.



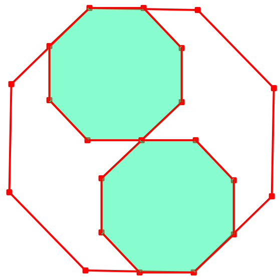
$$\overline{JL}=\overline{BJ}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \overline{BD}=2\sqrt{2}$$

$$\overline{DJ}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

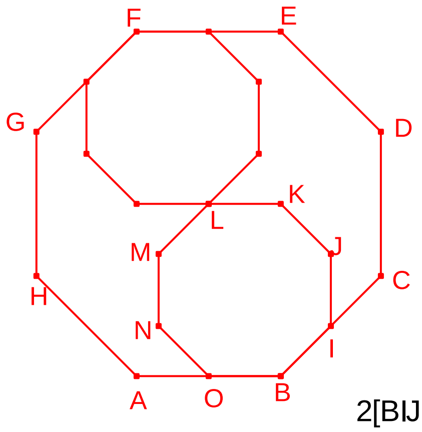
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\overline{JL}}{\overline{DJ}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{5\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{5}$$

$$\tan\alpha=\frac{2\cdot\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{12}$$

3660.- Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels dos octògons regulars ombrejats iguals i l'àrea de l'octògon regular exterior.



Solució:



L és el centre de l'octògon ABCDEFGH

La proporció entre els octògons regulars ABCDEFGH, BIJKLMNO és BF:BL=2:1

La proporció és:

2[BIJKLMNO]/[ABCDEFGH]=2·(1/2)²=1/2