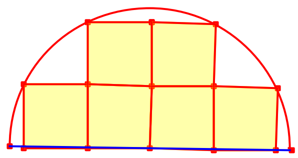
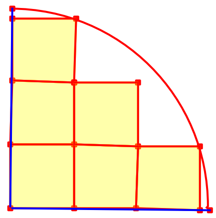
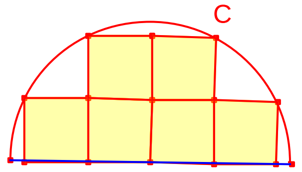
Problemes de Geometria per a l'ESO 367

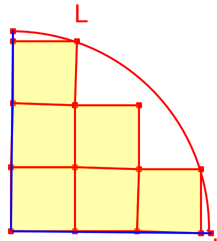
3661.- Per empaquetar sis quadrats quin és el millor procediment és més òptim, dins d'un semicercle o dins d'un quadrant.





Solució:





$OA=OC=r$

$OB=c$

$r=c\cdot \mathrm{sqrt}(5)$

$PK=s$

$PJ=c$

$s=c\cdot \mathrm{sqrt}(10)$

Proporció:

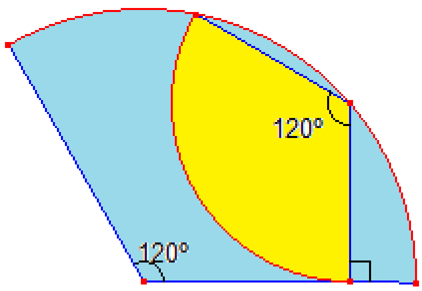
$P1=6c^2/(Pi/2\cdot r^2)=12/(5\cdot Pi)$

Proporció:

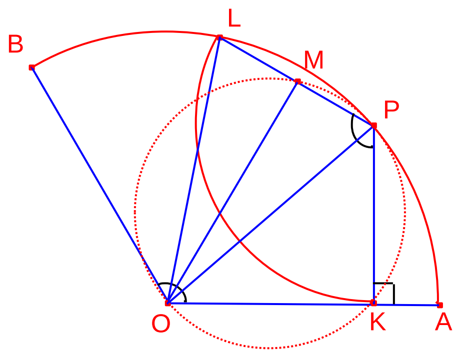
$P2=6c^2/(Pi/4\cdot s^2)=12/(5\cdot PI)$

Són iguals les dues proporcions

3662.- La figura està formada per dos sectors circulars de 120º.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea groga.



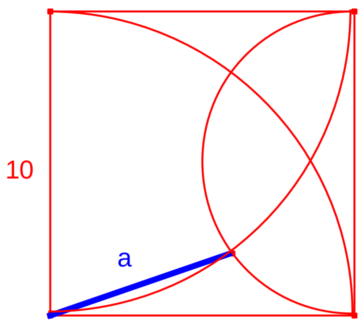
Solució:
siga el sector de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga el sector de centre P i radi $\overline{PK} = r$
Siga M el punt mig del segment $\overline{PL} = r$
El quadrilàter $OKPM$ és inscriptible ja que té els angles oposats suplementaris.



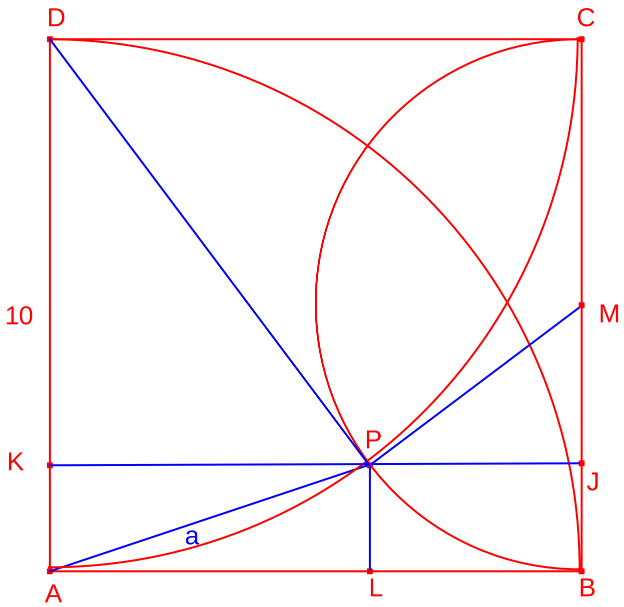
$\overline{OM} =$
$\overline{OK} = \sqrt{R^2 - r^2}$
aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{KPM}$:
$$\overline{KM}^2 = r^2 + \frac{1}{4}r^2 + 2\cdot r\cdot\frac{1}{2}r\cdot\frac{1}{2}$$
$$\overline{KM} = \frac{\sqrt{7}}{2}r$$
Aplicant el teorema de Tolomeu al quadrilàter $OKPM$:
$$\overline{PM}\cdot\overline{OK} + \overline{PK}\cdot\overline{OM} = \overline{OP}\cdot\overline{KM}$$
$$\frac{1}{2}r\sqrt{R^2 - r^2} + r\frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - r^2} = R\frac{\sqrt{7}}{2}r$$
Simplificant:
$$3R^4 = 7r^2R^2$$
$$R^2 = \frac{7}{3}r^2$$

La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{blava}}{S_{groga}} = \frac{S_{sectorO} - S_{sectorP}}{S_{sectorP}} = \frac{R^2 - r^2}{r^2} = \frac{\frac{7}{3} - 1}{1} = \frac{4}{3}$$

3663.- En el quadrat de costat 10 de la figura s'ha dibuixat un quadrant i una semicircumferència. Calculeu la mesura del segment a



Solució:



AK=LP=BJ=b

JM=5-b

KP=c

PJ=10-c

t. Pitàgores KPD

$b^2+c^2-20b=0$

t Pitàgores PJM

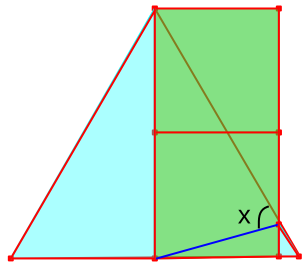
$b^2+c^2-20c-10b+100=0$

c=6, b=2

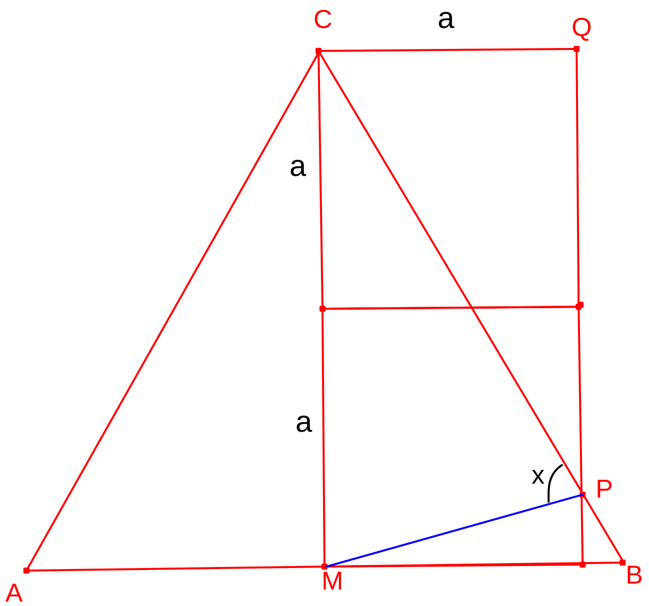
t. Pitàgores ALP

a=sqrt(40)

3664.- Sobre l'altura d'un triangle equilàter s'ha dibuixat dos quadrats iguals.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



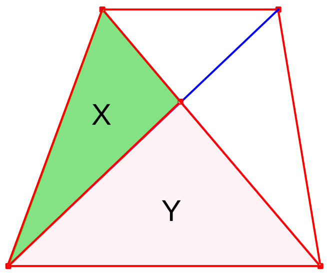
angleCPQ=30º

CP=2·CD=2a

CMP isòsceles

x=75º

3665.- Les diagonals d'un trapezi divideixen el trapezi en quatre triangles.
Els ombrejats tenen àrees X, Y.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total del trapezi, en funció de X, Y



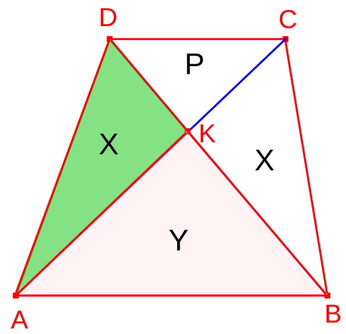
Solució:
Siga el trapezi $ABCD$.
Siga $S_{AKD} = X, S_{ABK} = Y$

$S_{AKD} = S_{BKC} = X$

Siga $S_{DCK} = P$

$\frac{P}{X} = \frac{\overline{DK}}{\overline{BK}}, \frac{X}{Y} = \frac{\overline{DK}}{\overline{BK}}$

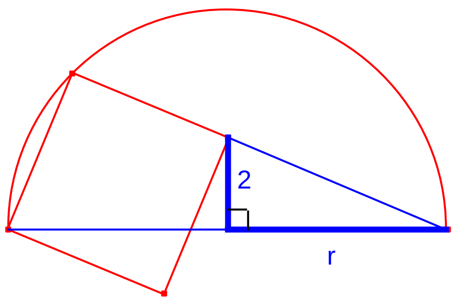
$P = \frac{X^2}{Y}$



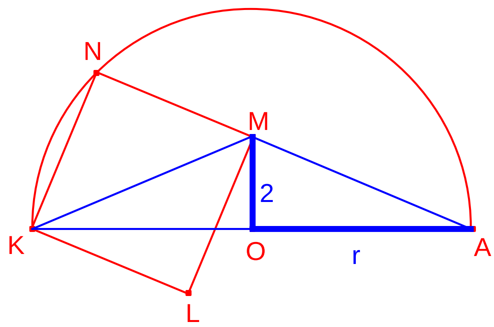
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{X+Y}{2X+Y+\frac{X^2}{Y}} = \frac{Y(X+Y)}{(X+Y)^2} = \frac{Y}{X+Y}$$

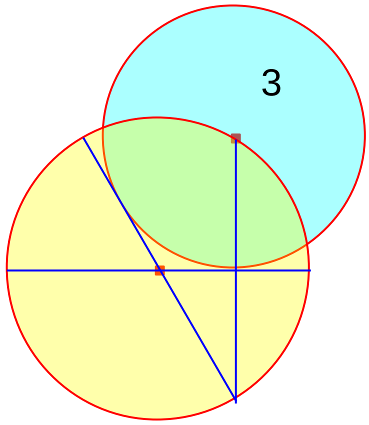
3666.- La figura està formada per una semicircumferència i un quadrat.
Calculeu el radi r de la semicircumferència.



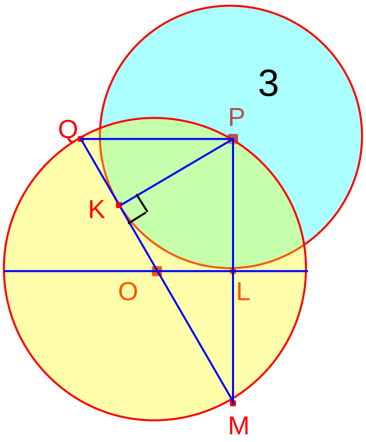
Solució:
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OA} = r$
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = c$
$\overline{KM} = \overline{AM} = c\sqrt{2}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MOA}, \overset{\Delta}{KNA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{2}{c} = \frac{r}{(1+\sqrt{2})c}$$
Aleshores:
$$r = 2(1+\sqrt{2})$$



3667.- Dos diàmetre d’un cercle són tangents a un altre cercle.
Una corda passa per un punt de tangència.
Si el cercle menut té àrea 3, determineu l’àrea del cercle gran.



Solució:

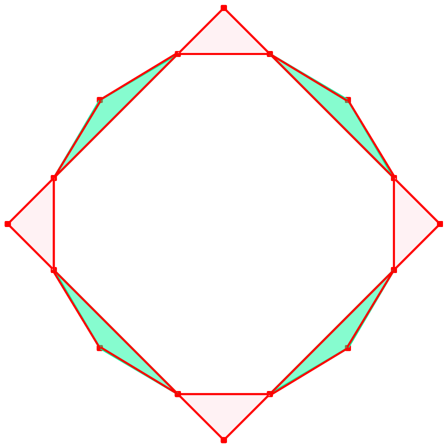


PK=PL=LM=r
PL=2r

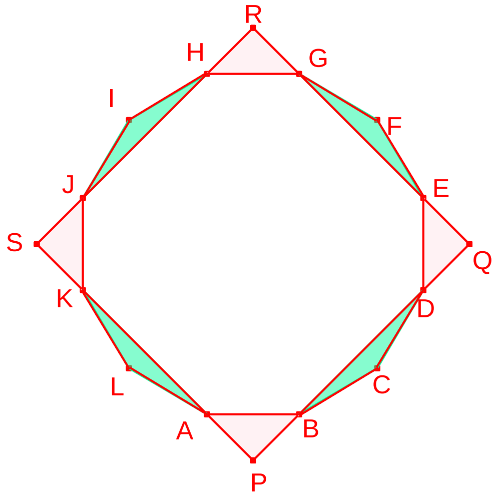
OQ=OM=R
angleKMP=30º

PM/QM=sqrt(3)/2
R=(2/3)sqrt(3)·r
$R^2=(4/3)r^2$
[Groc]=(4/3)[Blau]=4

3668.- La figura està formada per un dodecàgon regular i un quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea rosa.



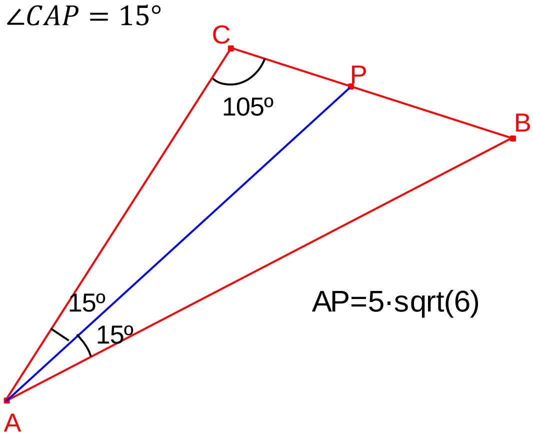
Solució:
Siga el dodecàgon regular $ABCDEFGHIJKL$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat $PQRS$.



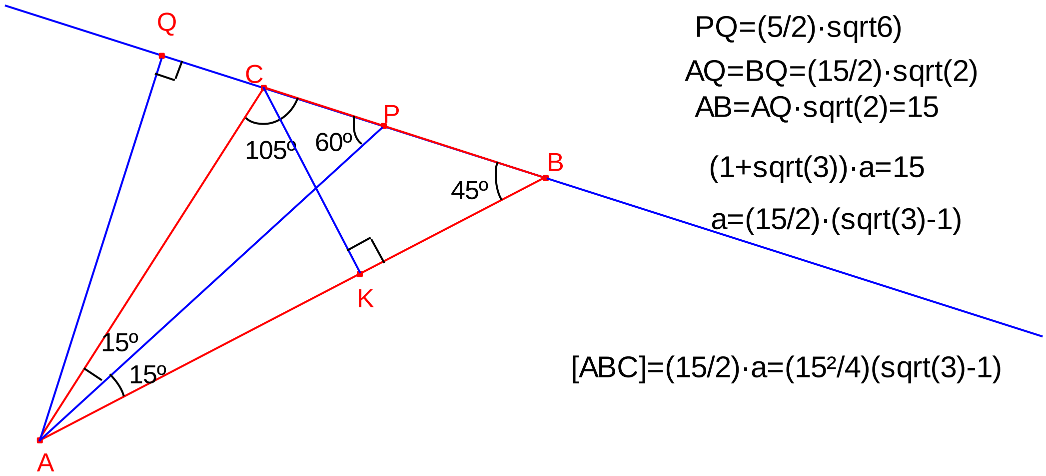
Els triangles rosa són iguals.
els triangles verds són iguals.
$\angle BCD = 150°$
$S_{BCD} = \frac{1}{2}c^2 \cdot \sin 150° = \frac{1}{4}c^2$
$\overline{AP} = \overline{BP} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$
$S_{APB} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 = \frac{1}{4}c^2$
L'àrea rosa i l'àrea verda són iguals.

3669.- El en triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de la figura, $C = 150°, \angle BAP = \angle CAP = 15°$
$\overline{AP} = 5\sqrt{6}$

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$



Solució (Sense trigonometria)



AP=5·sqrt(6)

BK=CK=a

AC=2a, AK=a·sqrt(3)

AB=(1+sqrt(3))·a

PQ=(5/2)·sqrt6)

AQ=BQ=(15/2)·sqrt(2)

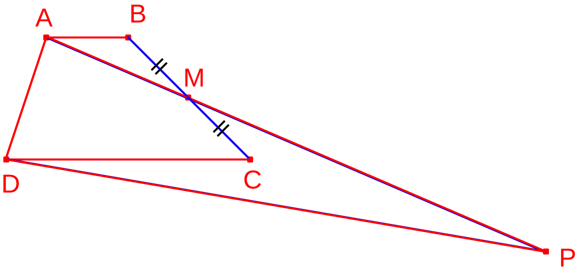
AB=AQ·sqrt(2)=15

(1+sqrt(3))·a=15

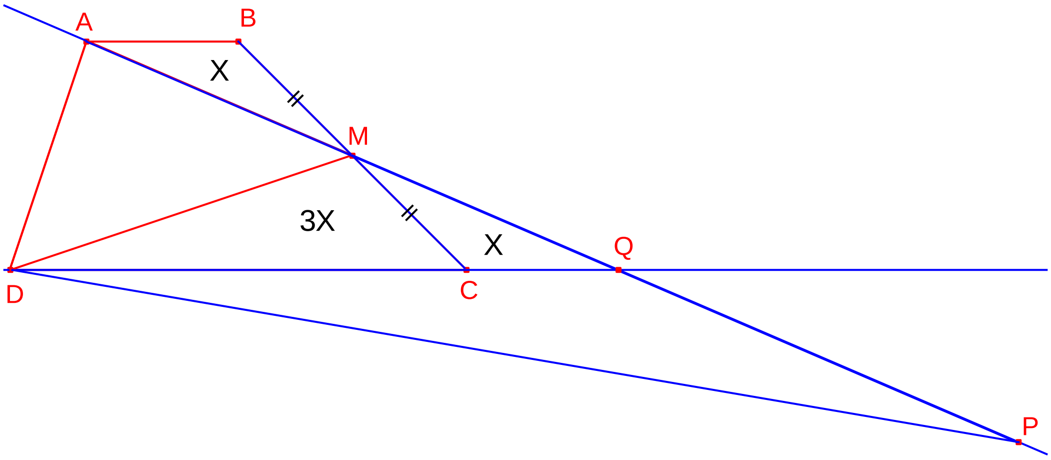
a=(15/2)·(sqrt(3)-1)

[ABC]=(15/2)·a=(15²/4)(sqrt(3)-1)

3670.- Siga el trapezi $ABCD$ tal que $\overline{BC} = 3 \cdot \overline{AB}$
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$
$2 \cdot \overline{PM} = 5 \cdot \overline{AM}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADP}$ és 28
Calculeu l'àrea del trapezi $ABCD$



Solució:



Els triangles $\overset{\Delta}{ABM}, \overset{\Delta}{CDM}$ tenen la mateixa altura sobre les bases paral·leles del trapezi.
Aleshores les àrees estan en proporció $1 : 3$
$X = S_{ABM}, S_{CDM} = 3X$
Siga $\overline{AM} = 2k, \overline{PM} = 5k$
Els triangles $\overset{\Delta}{AMD}, \overset{\Delta}{APD}$ tenen la mateixa altura sobre la base $\overline{AP}$
Aleshores:
$$S_{AMD} = \frac{2}{7} \cdot S_{APD} = \frac{2}{7} \cdot 28 = 8$$
$$S_{DMP} = 20$$

Siga Q la intersecció de les rectes AP, CD.
Els triangles $\overset{\Delta}{ABM}, \overset{\Delta}{QCM}$ són iguals.
$S_{QCM} = X$
Els triangles $\overset{\Delta}{DMQ}, \overset{\Delta}{DMP}$ tenen la mateixa altura sobre la base $\overline{AP}$
$$S_{DMQ} = \frac{2}{5} \cdot S_{DMP} = \frac{2}{8} \cdot 20 = 8$$

$$S_{ABCD} = S_{AMD} + S_{DMQ} = 8 + 8 = 16$$