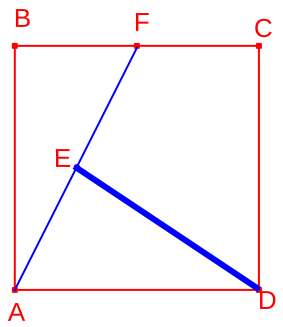
3671.- Siga el quadrat $ABCD$ de costat $2\sqrt{13}$
Siga F el punt mig de $\overline{BC}$
siga E el punt mig de $\overline{AF}$
Calculeu la mesura del segment $\overline{DE}$



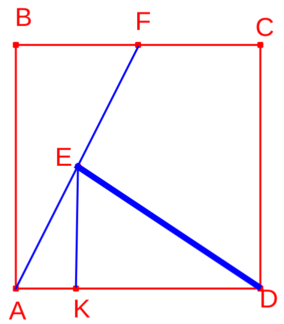
Solució:
$\overline{BF} = \sqrt{13}$
Siga K la projecció de E sobre $\overline{AD}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABF}, \overset{\Delta}{EKA}$ són semblants i de raó $2:1$
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{AK} = \frac{1}{2}\sqrt{13}, \overline{EK} = \sqrt{13}$$

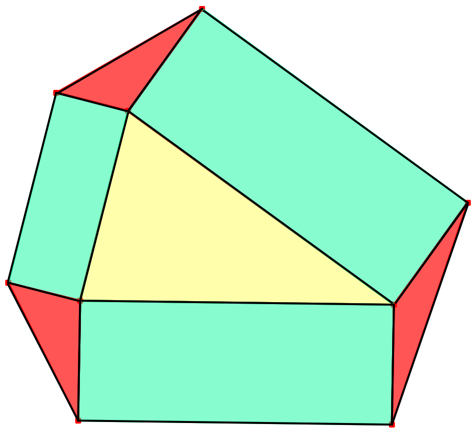
$$\overline{KD} = 2\sqrt{13} - \frac{1}{2}\sqrt{13} = \frac{3}{2}\sqrt{13}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EKD}$:

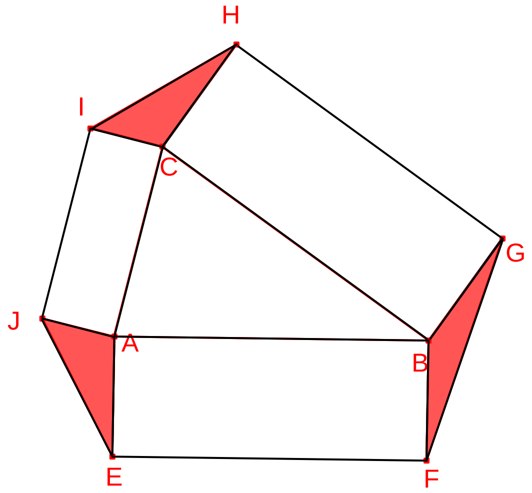
$$\overline{DE} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{13}\right)^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2} = \frac{13}{2}$$



3672.- Tres rectangles i quatre triangles.
Si els triangles vermells tenen la mateixa àrea, demostreu que els rectangles verds són semblants.



Solució:



BC=a, AC=b, AB=c
BF=k, BG=m, CH=n

mn·sin C=km·sin B=kn sin A

n/k=sin B/sin C=b, c

n/b=k/c

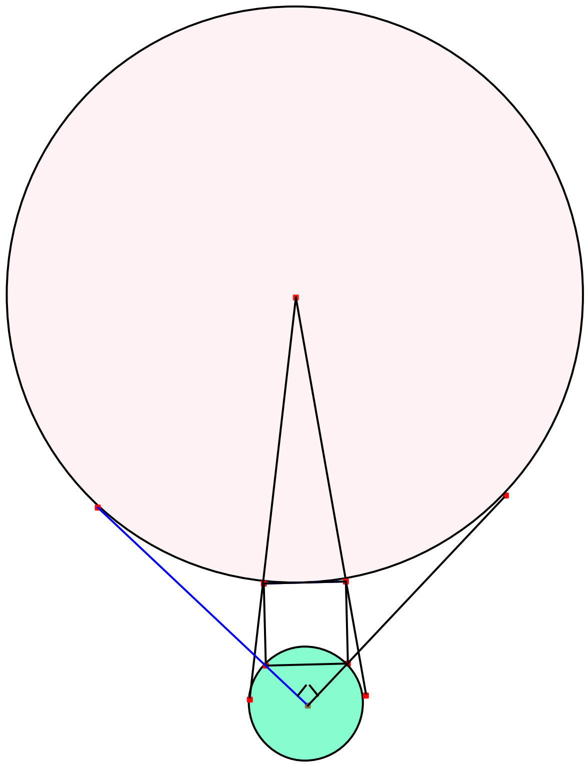
ABFE, ACIJ semblants

m/n=sin A/ sin B=a/b

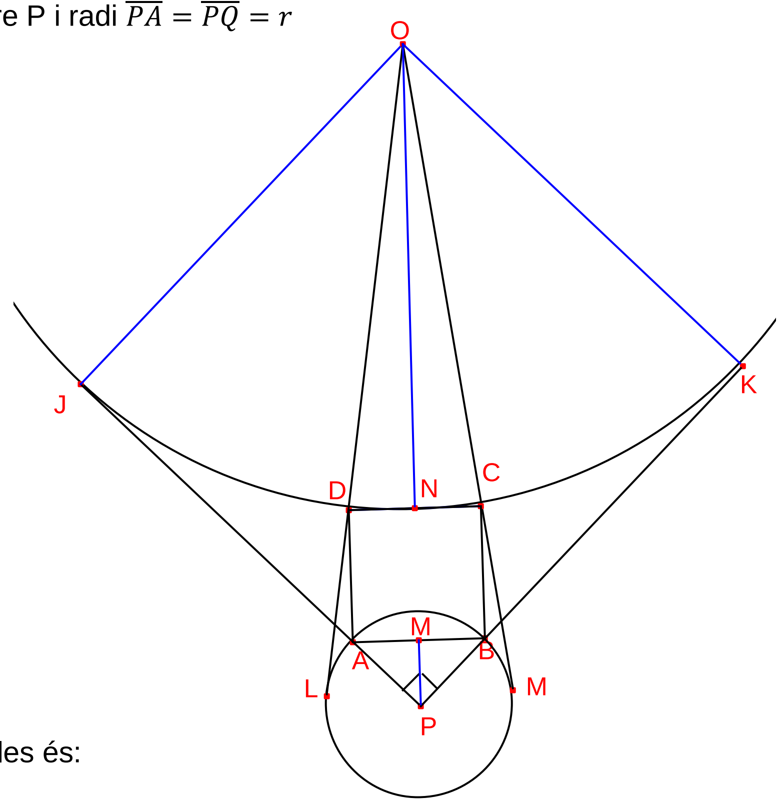
m/a=n/b

BCAG, ACIJ semblants

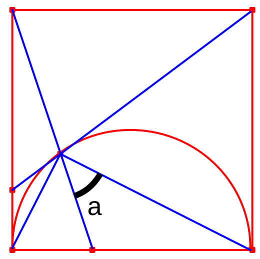
3673.- La figura està formada per dues circumferències, quatre segments tangents i un quadrat.
Determineu la proporció entre eles àrees del cercle menut i el gran.



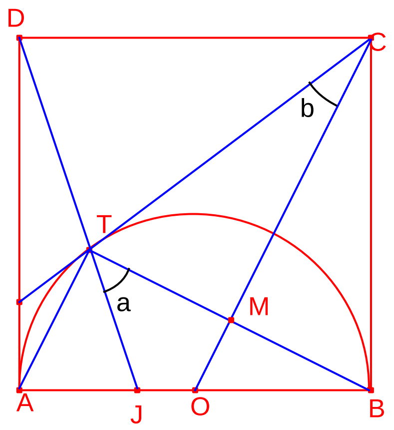
Solució:
Siga la circumferència gran de centre O i radi $\overline{OJ} = \overline{OK} = R$
Siga la circumferència menuda de centre P i radi $\overline{PA} = \overline{PQ} = r$
$OJPK$ és un quadrat.
$\overline{OP} = R\sqrt{2}$
El costat del quadrat $ABCD$ és:
$\overline{AB} = r\sqrt{2}$
$\overline{PM} = \frac{\sqrt{2}}{2} r$
$\overline{ON} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{2} r^2}$
$\overline{OP} = \frac{\sqrt{2}}{2} r + r\sqrt{2} + \sqrt{R^2 - \frac{1}{2} r^2}$
$R\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} r + r\sqrt{2} + \sqrt{R^2 - \frac{1}{2} r^2}$
Simplificant:
$5r^2 - 6rR + R^2 = 0$
Resolent l'equació:
$\frac{r}{R} = \frac{1}{5}$
La proporció de les àrees dels dos cercles és:
$\frac{S_{menut}}{S_{gran}} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{1}{25}$



3674.- La figura està formada per un quadrat i una semicircumferència amb diàmetre un costat del quadrat. Calculeu la mesura de l'angle a



Solució:



angleTCD=90º-2b

angleMBO=b

CD=BC=CT

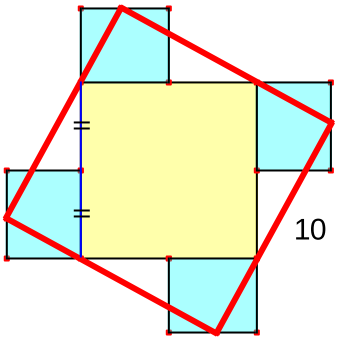
angleCDT=angleCTD=45º+b

angleADJ=45º-b

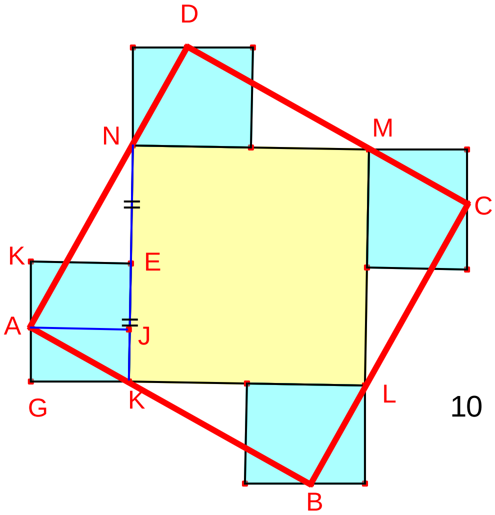
angleTJB=135º-b

a=45º

3675.- La figura està formada per dos quadrats i quatre rectangles.
El costat del quadrat roig mesura 10.
Calculeu la sumada de les àrees ombrejades de bau i groc.



Solució:



ABCD, AB=10
KLMN, KL=c
KE=c/2
ND=x, DM=y
$x+y=10$
$c^2=x^2+y^2$

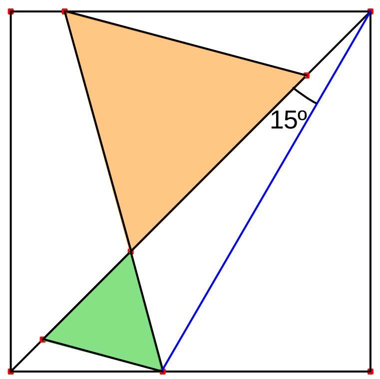
GK=AJ=b

NJA, MDN semblants

T. Tales:
$b=xy/c$

$[blue]+[yelow]=4bc/2+c^2=x^2+y^2+2xy=(x+y)^2=100$

3676.- La figura està formada per un quadrat i dos triangles equilàters sobre la diagonal.
Calculeu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea taronja.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{PQR}$ de costat $\overline{PQ} = c$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{PTU}$ de costat $\overline{PT} = d$

Els triangles $\overset{\Delta}{APR}, \overset{\Delta}{CUP}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{d}{c} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{APR}$

$$\frac{\overline{AP}}{\sin 75°} = \frac{c}{\sin 45°}$$

$$\overline{AP} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}c$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{RPC}$

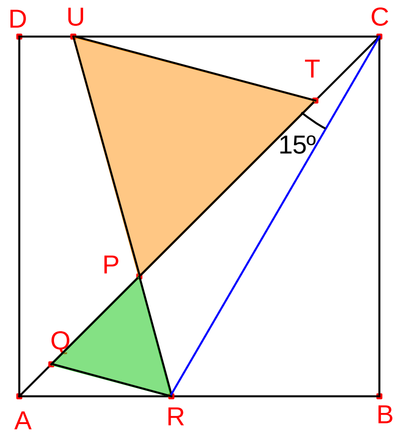
$$\frac{\overline{PC}}{\sin 55°} = \frac{c}{\sin 15°}$$

$$\overline{PC} = \left(1+\sqrt{3}\right)c$$

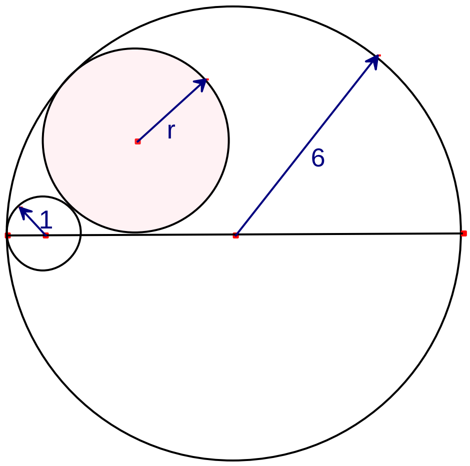
$$\frac{d}{c} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = 2$$

La proporció d'àrees és:

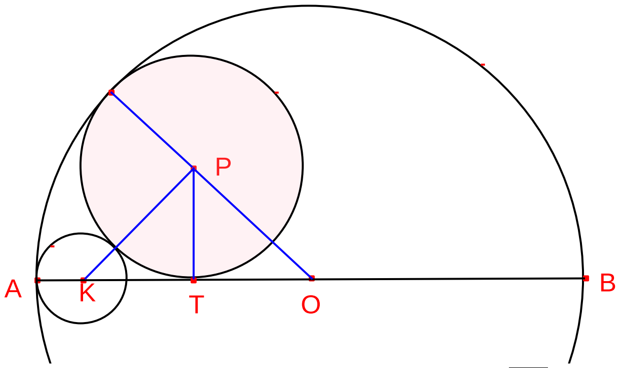
$$\frac{S_{PTU}}{S_{PQR}} = \left(\frac{d}{c}\right)^2 = 4$$



3677.- La figura està formada per tres circumferències de radis 1, r, 6.
Calculeu el radi r.



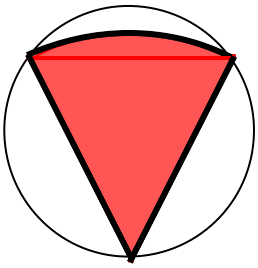
Solució:



Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = 6$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = r$
Siga la circumferència de centre K i radi $\overline{KA} = 1$

Siga $\overline{OT} = a$
$\overline{PK} = r + 1, \overline{OP} = 6 - r, \overline{KT} = 5 - a$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{OTP}, \overset{\Delta}{KTP}$
$(6 - r)^2 = a^2 + r^2$
$(1 + r)^2 = r^2 + (5 - a)^2$
$$\begin{cases} 36 - 12r = a^2 \\ 1 + 2r = 25 - 10a + a^2 \end{cases}$$
Resolent el sistema:
$$\begin{cases} r = \dfrac{120}{49} \\ a = \dfrac{18}{7} \end{cases}$$

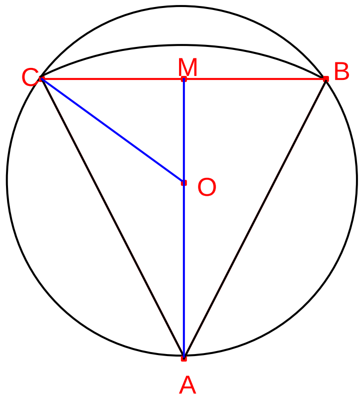
3678.- Calculeu la proporció màxima entre l'àrea del sector i l'àrea del cercle.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = 1$
Siga el sector de centre A i radi $\overline{OC} = R$ i angle $\angle BAC = 2\alpha$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AOC}$

$$\frac{R}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2\sin\alpha}$$

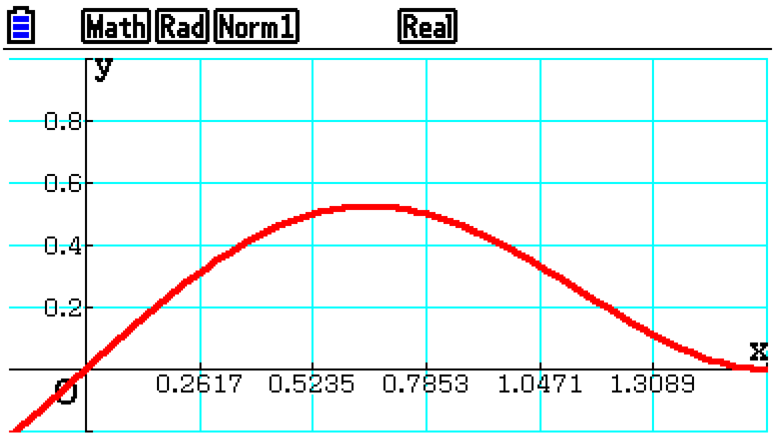
$$R = 2 \cdot \cos\alpha$$



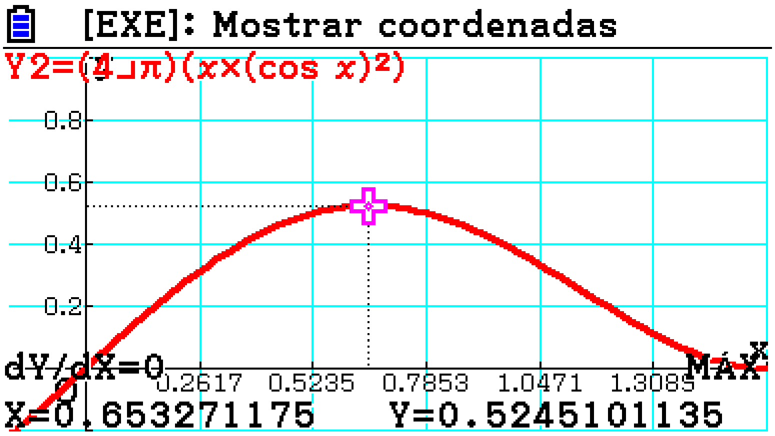
La proporció d'àrees és:

$$p(\alpha) = \frac{R^2\alpha}{\pi} = \frac{4}{\pi} \cdot \alpha \cdot \cos^2\alpha \, , \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Representem la funció amb calculadora:

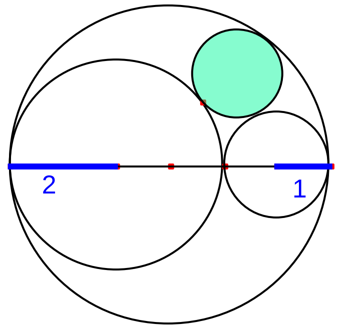


Calculem el màxim de la funció:

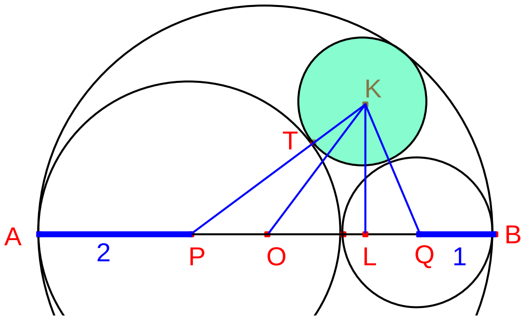


El màxim s'assoleix quan $\alpha = 0.653271175$
La proporció màxima és:
$p = 0.5245101135$

3679.- Calculeu la proporció entre l'àrea del cercle ombrejat i l'àrea del cercle exterior.



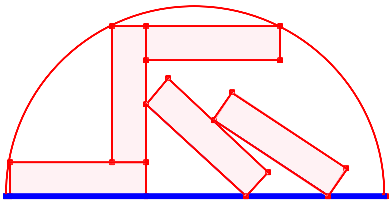
Solució:
Siga el cercle de centre O i radi $\overline{OA} = 3$
Siga el cercle de centre P i radi $\overline{PA} = 2$
Siga el cercle de centre Q i radi $\overline{QB} = 1$
Siga el cercle de centre K i radi $\overline{KT} = r$
Siga L la projecció de K sobre el diàmetre $\overline{AB}$



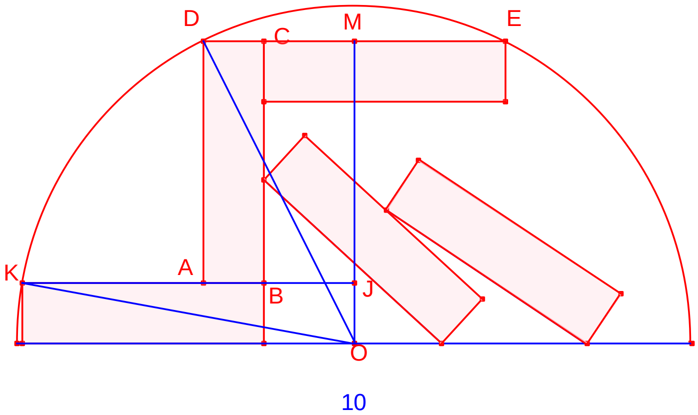
Siga $\overline{LQ} = a$
$\overline{PK} = 2 + r, \overline{OK} = 3 - r, \overline{QK} = 1 + r$
$\overline{OL} = 2 - a, \overline{PL} = 3 - a$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{QLK}, \overset{\Delta}{OLK}, \overset{\Delta}{PLK}$:
$(1 + r)^2 - a^2 = (3 - r)^2 - (2 - a)^2 = (2 + r)^2 - (3 - a)^2$
Resolent el sistema:
$$r = \frac{6}{7}$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_K}{S_O} = \left(\frac{\frac{6}{7}}{3}\right)^2 = \frac{4}{49}$$

3680.- En un semicercle de diàmetre 10 s'han inscrit cinc rectangles iguals.
Calculeu la suma de les àrees dels cinc rectangles



Solució:



BC=a, AB=b

T. Pitàgores OMD

$(5/4)\cdot(a+b)^2=25$

$a+b=2*\mathrm{sqrt}(5)$

$KJ=(3a-b)/2$

T. Pitàgores KJO

$b^2+((3a-b)^2/4=25$

$a=(8/5)\mathrm{sqrt}(5)$, $b=(2/5)\mathrm{sqrt}(5)$

$S=5ab=16$