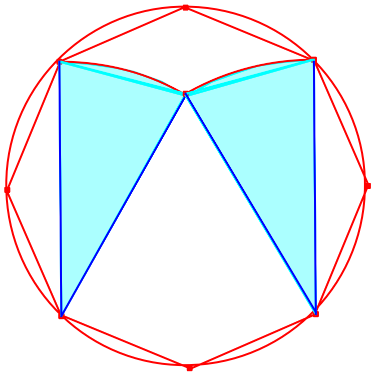
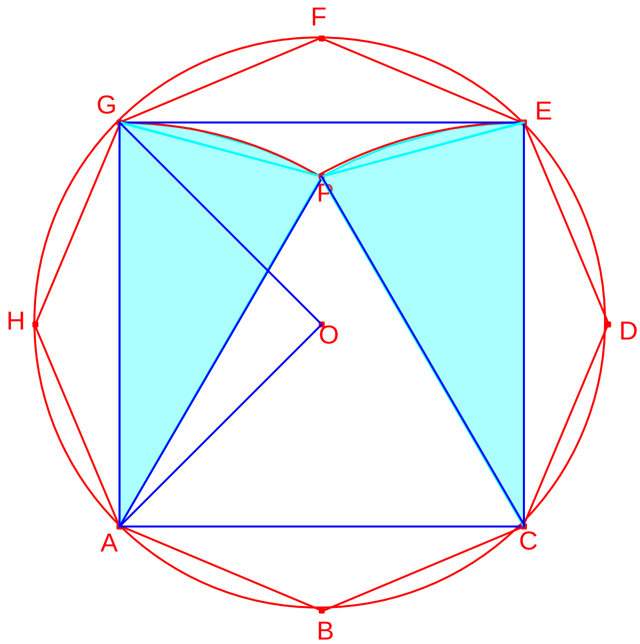
Problemes de Geometria per a l'ESO 369

3681.- En una circumferència s'ha inscrit un octògon regular i dos sectors.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle exterior.



Solució:



OA=1

ACED quadrat

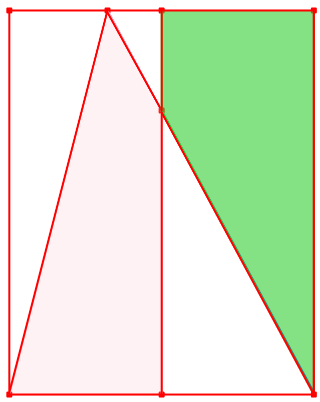
AG=sqrt(2)

ACP triangle equilàter

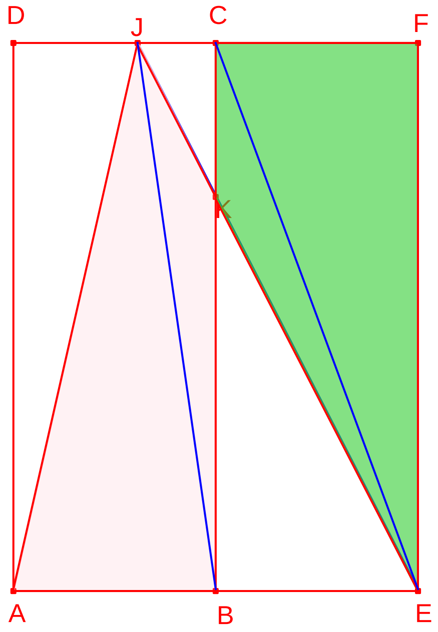
angleGAP=30º

[blue]/[total]=2·(1/12)·2=1/3

3682.- La figura està formada per dos rectangles iguals adossats.
dos segments divideixen la figura en quatre triangles i dos quadrilàters.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos quadrilàters.



Solució:



ABCD, BEFC iguals

AB=a, AD=b

[ABJ]=[CFE]

CJ=x, CK=y

BK=2b-x

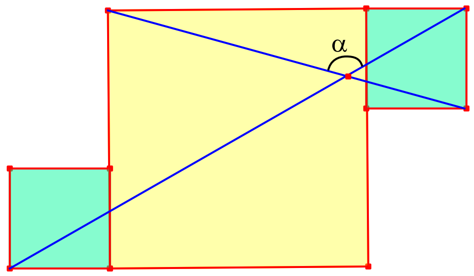
JCK, BRK semblants

T. Tales:
ya=x(b-y)

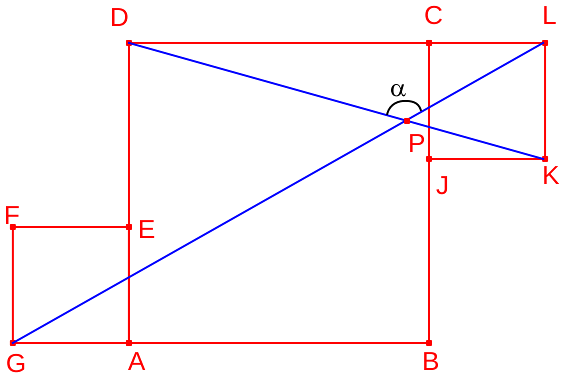
[CKE]=[BKJ]

[ABKJ]=[EFCK]

3683.- La figura està formada per tres quadrats els menuts són iguals.
Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:



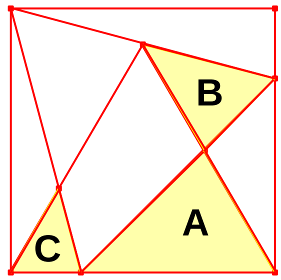
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siguen els quadrats iguals $AEFG, CJKL$ de costat $\overline{AE} = b$
Siga $\angle DPL = \alpha$
siguen $\angle PLD = \beta, \angle PDL = \gamma$

$$\tan\beta = \frac{a}{a+2b}, \tan\gamma = \frac{b}{a+b}$$

$$\tan\alpha = -\tan(\beta+\gamma) = -\frac{\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{a+b}}{1 - \frac{a}{a+2b}\cdot\frac{b}{a+b}} = -1$$

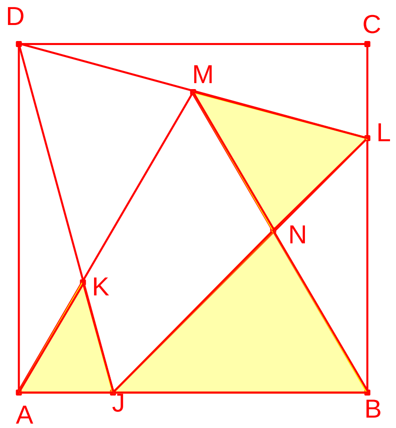
$\alpha = 135°$

3684.- La figura està formada per un quadrat i dos triangles equilàters.
Calculeu la proporció d'àrees $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} : \boldsymbol{C}$



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Els triangles $\overset{\Delta}{AJK}, \overset{\Delta}{LMN}, \overset{\Delta}{BNJ}$ són semblants, ja que els angles són iguals $60°, 75°, 45°$

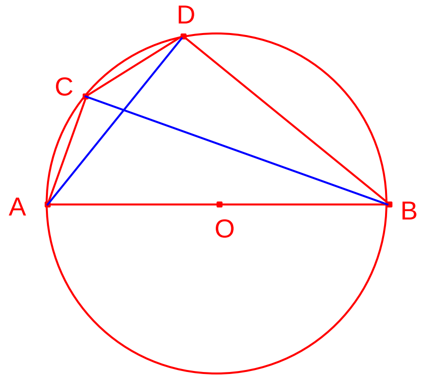
$\overline{AJ} = \overline{CL} = \tan 15° = 2 - \sqrt{3}$
$\overline{BJ} = \sqrt{3} - 1$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AKD}$:
$$\frac{\overline{AK}}{\sin 15°} = \frac{1}{\sin 135°}$$
$$\overline{AK} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DCL}$:
$$\overline{DL}^2 = 4\left(2 - \sqrt{3}\right)$$
$$\overline{LM}^2 = 2 - \sqrt{3}$$

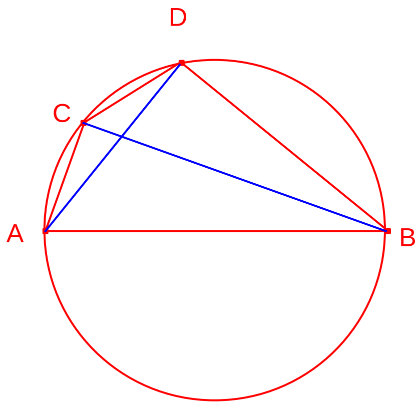
Les proporcions són:
$$\frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{L}} = \frac{S_{AJK}}{S_{BNJ}} = \left(\frac{\overline{AK}}{\overline{BJ}}\right)^2 = \frac{1}{4}$$
$$\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}} = \frac{S_{LMN}}{S_{BNJ}} = \left(\frac{\overline{LM}}{\overline{BJ}}\right)^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2} = \frac{1}{2}$$
Aleshores:
$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} : \boldsymbol{C} = 4 : 2 : 1$

3685.- En la figura calculeu la mesura del diàmetre $\overline{AB}$



AC=3
CD=3
BD=7

Solució:



AB=d

AD=sqrt(d^2-49)
BC=sqrt(d^2-9)

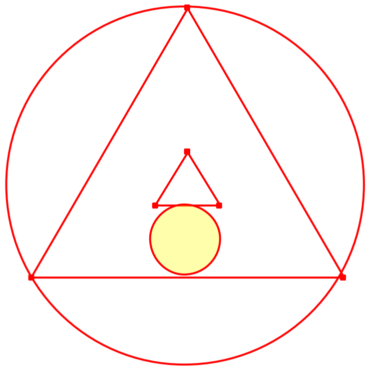
Teorema de Tolomeu

3·7+3·d=sqrt(d^2-49)·sqrt(d^2-9)

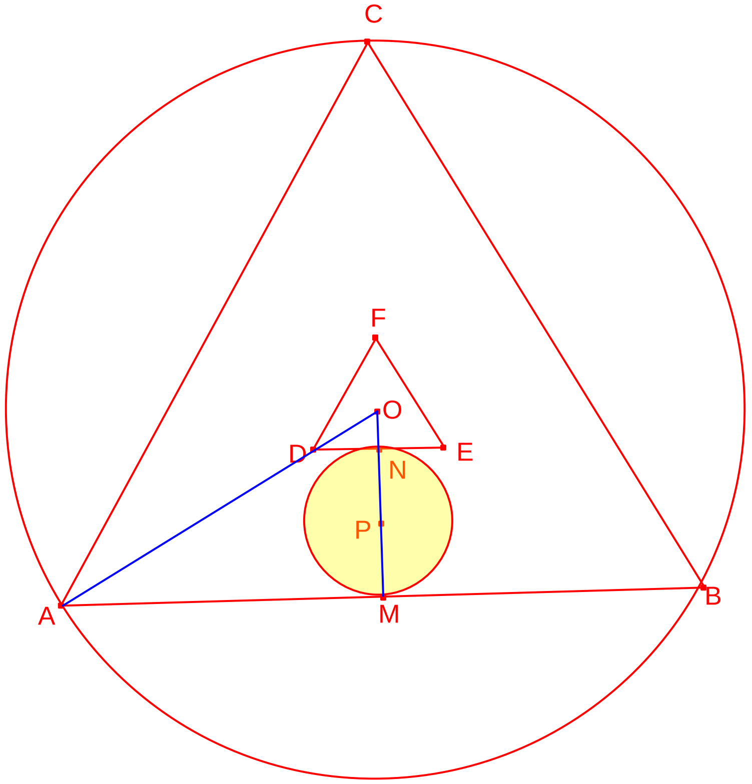
d(d^3-57d-126)=0

d=9

3686.- L’àrea del triangle equilàter gran és 25 vegades l’àrea del triangle equilàter concèntric menut.
Calculeu la proporció entre l’àrea del cercle ombrejat i el cercle exterior.



Solució:



Siga el triangle equilàter gran $\overset{\Delta}{ABC}$ de centre O.

Siga el triangle equilàter menut $\overset{\Delta}{DEF}$ de centre O.

$S_{ABC} = 25 \cdot S_{DEF}$

Aleshores:

$\overline{AB} = 5 \cdot \overline{DE}$

$\overline{OM} = 5 \cdot \overline{ON}$

$\overline{PN} = 2 \cdot \overline{ON}$

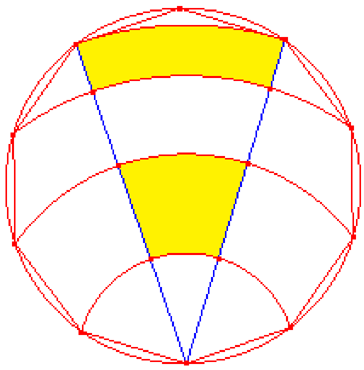
$\overline{OD} = 2 \cdot \overline{ON}$

$\overline{AM} = 5 \cdot \overline{DN} = 10 \cdot \overline{ON}$

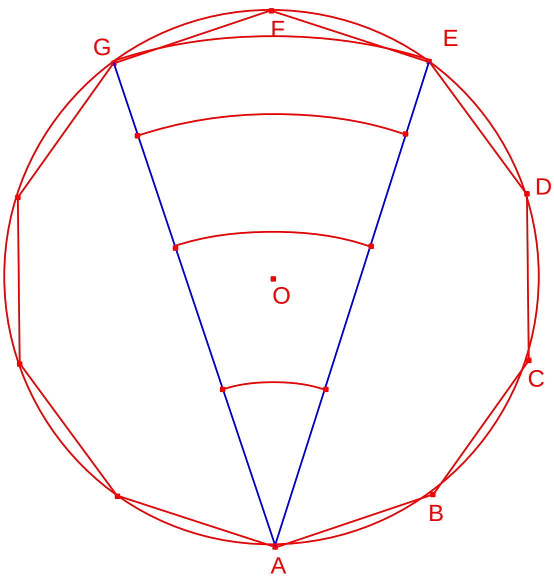
La proporció d’àrees dels cercles és:

$$\frac{S_P}{S_O} = \left(\frac{\overline{PN}}{\overline{OA}}\right)^2 = \left(\frac{2 \cdot \overline{ON}}{10 \cdot \overline{ON}}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

3687.- La figura està formada per un decàgon regular.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle circumscrit al decàgon regular.



Solució:



$AB=1$

$OA=Phi$

$AC^2=2+Phi$

$AE^2=3+4Phi$

$AC^2=(1+Phi)/(2-Phi)$

AngleGAE=36º

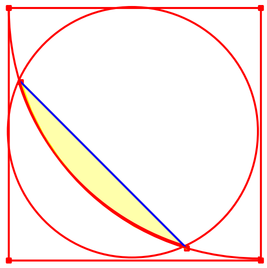
$[ombrejada]=(1/10)(AE^2-AD^2+AC^2-1)\cdot Pi$

$[decàgon]=Pi\cdot Phi^2$

Proporció:

$[ombrejada]/[decàgon]=1/5$

3688.- La figura està formada per un quadrat una circumferència inscrita al quadrat i un quadrant. Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$ i centre O.

Siga $\alpha = \angle PCO$

$\overline{CP} = 1, \overline{OP} = \frac{1}{2}, \overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{OCP}$

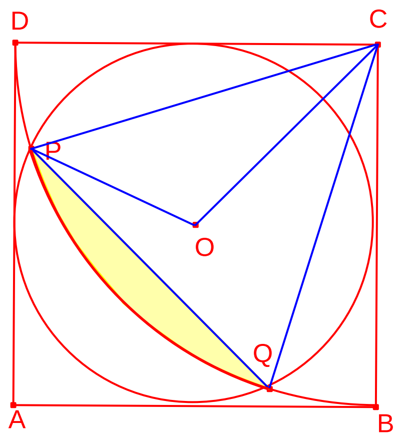
$\frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} - 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{8}$

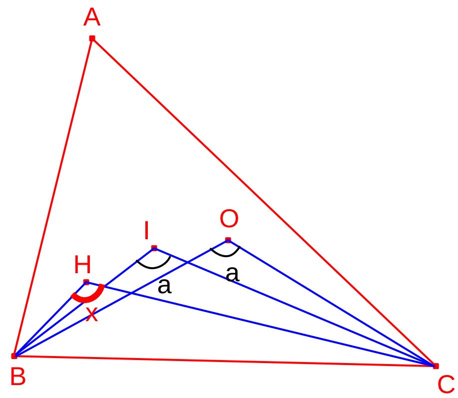
$\sin\alpha = \frac{\sqrt{14}}{8}, \sin 2\alpha = \frac{5\sqrt{7}}{16}$

L'àrea ombrejada és:

$S_{ombejada} = 1^2 \cdot \frac{2\alpha}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 2\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{14}}{8} - \frac{5\sqrt{7}}{32} \approx 0.0733$



3689.- Siguen H, I, O l'ortocentre, l'incentre i el circumcentre, respectivament, del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Si $\angle BIC = \angle BOC$, determineu la mesura de l'angle $\angle BHC$.



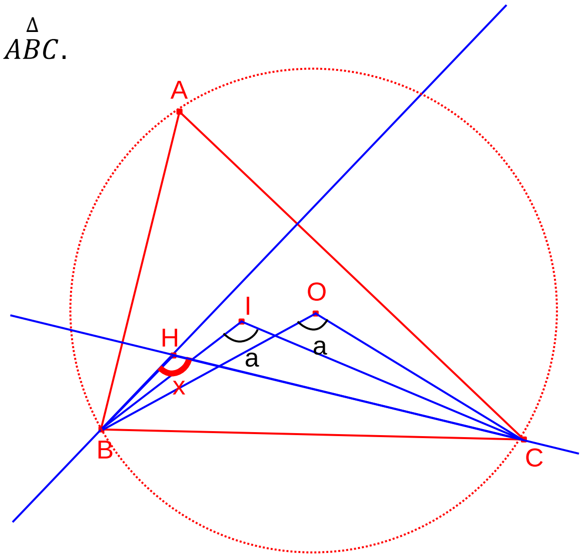
Solució:

Siga $\angle BIC = \angle BOC = a$

Siga $x = \angle BHC$

Considerem la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\angle BOC = 2A$



$\angle IBC = \frac{B}{2}, \angle BCI = \frac{C}{2}$

Aleshores:

$\angle BIC = 1\text{¡}\,90° + \frac{A}{2}$

$2A = 90° + \frac{A}{2}$

Resolent l'equació:

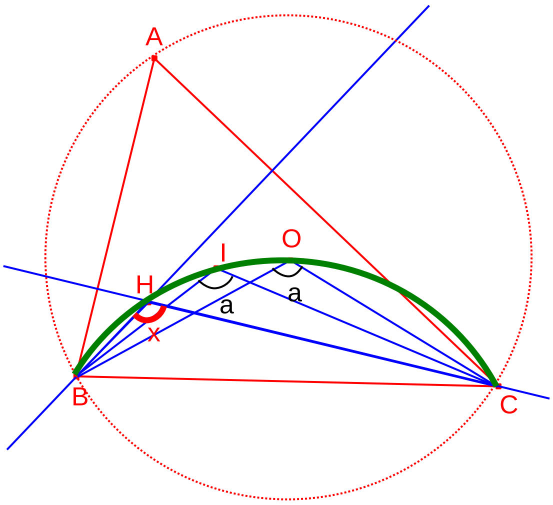
$A = 60°$

$\angle HBC = 90° - C, \angle BCH = 90° - B$

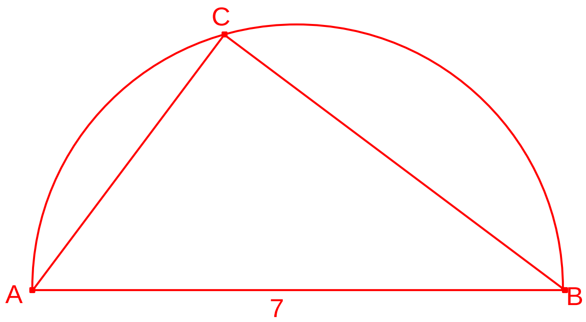
Aleshores:

$x = \angle BHC = 180° - A = 120°$

Per tant, $\angle BIC = \angle BOC = \angle BHC = 120°$



3690.- Donada la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB} = 7$
Calculeu el valor màxim de $3 \cdot \overline{AC} + 4 \cdot \overline{BC}$



Solució:
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC}^2 = 49 - \overline{BC}^2$
Siga $x = \overline{BC}$
Considerem la funció:
$f(x) = 3x\sqrt{49 - x^2} + 4, x \in [0, 7]$
$$f'(x) = \frac{-3x}{\sqrt{49 - x^2}} + 4$$
$f'(x) = 0$, resolent l'equació:
$$x = \frac{28}{5}$$
$$f"\left(\frac{28}{4}\right) < 0$$
En $x = \frac{28}{5}$ s'assoleix el màxim de la funció.
El valor màxim és:
$$f\left(\frac{28}{4}\right) = 35$$