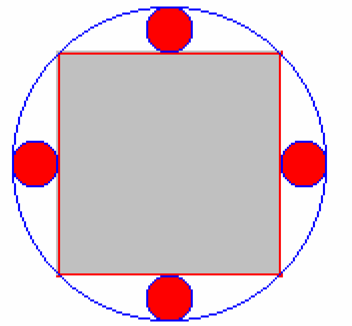
Problemes de Geometria per a l'ESO 37

361.- Determineu la suma de les àrees de les quatre circumferències menudes de la figura si la circumferència exterior té radi r.



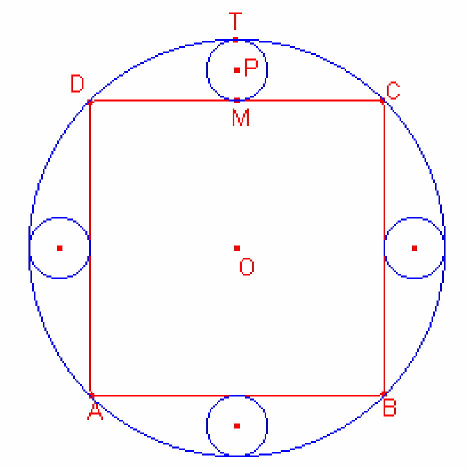
Solució:

Siga O el centre de la circumferència exterior de radi r.

Siga M el punt mig de costat $\overline{CD}$.

Siga T el punt de tangència de la circumferència de centre P

$\overline{OT} = r$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMD}$:

$$\overline{OM} = \frac{\sqrt{2}}{2} r.$$

$$\overline{PM} = \frac{\overline{OT} - \overline{OM}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} r.$$

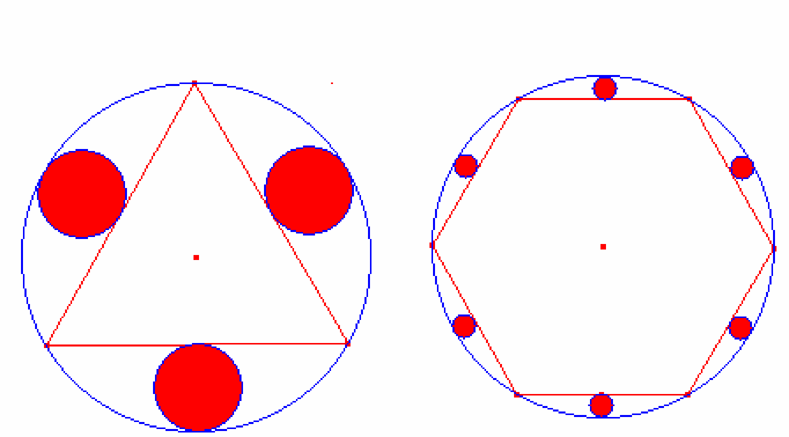
La suma de les àrees de les quatre circumferències menudes és:

$$S = 4\left(\pi\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4} r\right)^2\right) = \frac{\pi\left(3-2\sqrt{2}\right)}{2} r^2.$$

Altres problemes:

a) Determineu la suma de les àrees de les tres circumferències menudes de la figura si la circumferència exterior té radi r.

b) Determineu la suma de les àrees de les sis circumferències menudes de la figura si la circumferència exterior té radi r.

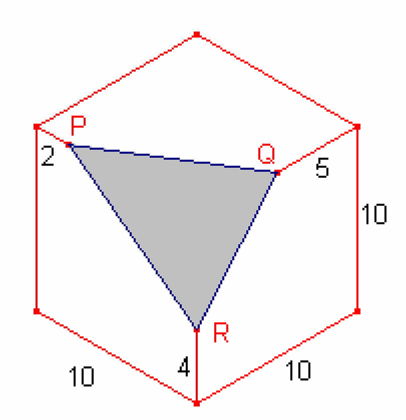


Solució:

a) $S = 3\left(\pi\left(\frac{r}{4}\right)^2\right) = \frac{3\pi}{16} r^2$, b) $S = 6\left(\pi\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4} r\right)^2\right)$.

362.- En la figura, un cub d'aresta 10, té un plànol que talla les arestes en els punts P, Q, R.

Calculeu l'àrea de triangle $\overset{\Delta}{PQR}$.

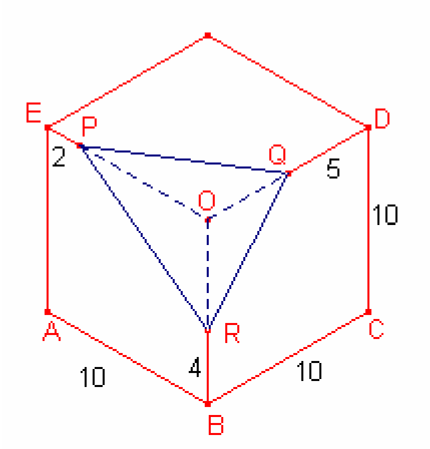


Solució:

P pertany a l'aresta $\overline{OE}$, $\overline{OP}=8$.

Q pertany a l'aresta $\overline{AD}$, $\overline{OQ}=5$.

R pertany a l'aresta $\overline{OB}$, $\overline{OR}=6$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ORQ}$:

$\overline{RQ}=\sqrt{6^2+5^2}=\sqrt{61}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPR}$:

$\overline{PR}=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$:

$\overline{PQ}=\sqrt{8^2+5^2}=\sqrt{89}$.

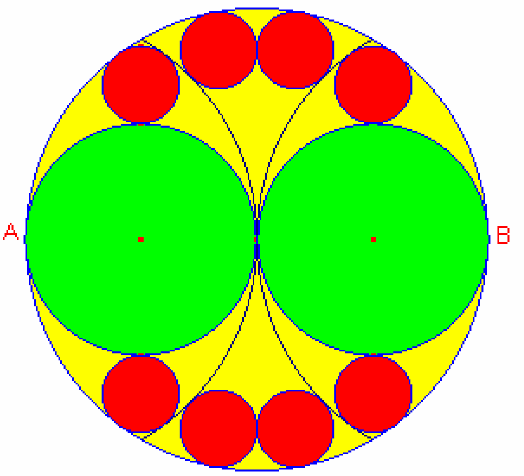
Aplicant la fórmula d'Heró per a calcular l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQR}$:

$$S_{PQR}=\frac{\sqrt{\left(10+\sqrt{61}+\sqrt{89}\right)\left(-10+\sqrt{61}+\sqrt{89}\right)\left(10-\sqrt{61}+\sqrt{89}\right)\left(10+\sqrt{61}-\sqrt{89}\right)}}{4}=$$

$$=\sqrt{1201}.$$

363.- En una circumferència de diàmetre $\overline{AB} = 2r$ i dos arcs de radi r i centres A i B.
S'han inscrit 10 circumferències tangents. Calculeu el radi de les vuit circumferències menudes.

Sangaku 1865.



Solució:
Siga O el centre de la circumferència de diàmetre $\overline{AB} = 2r$.

El radi de les circumferències mitjanes és $\overline{DA} = \frac{r}{2}$

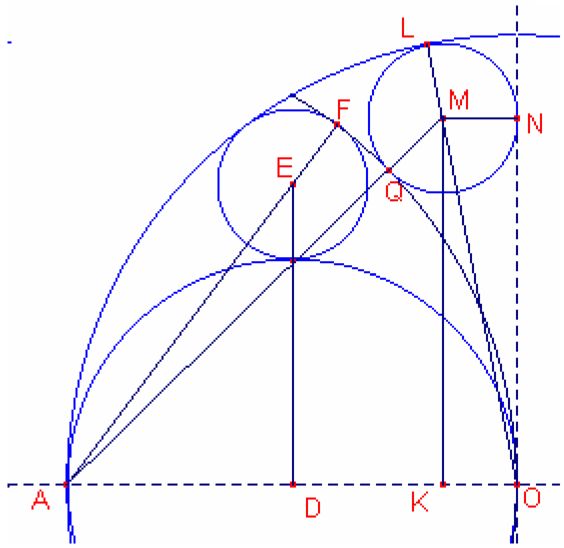
Siga la circumferència de centre E i radi $s = \overline{EF}$.

$\overline{AE} = r - s$, $\overline{DE} = \frac{r}{2} + s$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$:

$(r-s)^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2} + s\right)^2$. Simplificant:

$s = \frac{r}{6}$.



Siga la circumferència de centre M i radi $t = \overline{ML}$.
Siga K la projecció de M sobre $\overline{AO}$.
$\overline{OK} = t$.
$\overline{AM} = r + t$, $\overline{OM} = r - t$.

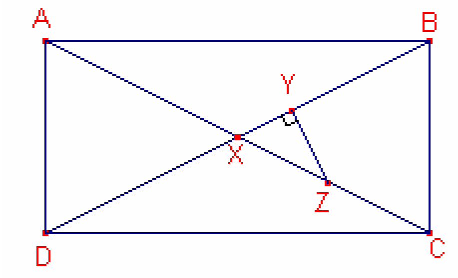
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KOM}$:
$\overline{KM}^2 = (r-t)^2 - t^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KAM}$:
$\overline{KM}^2 = (r+t)^2 - (r-t)^2$.
Igualant ambdues expressions:
$(r-t)^2 - t^2 = (r+t)^2 - (r-t)^2$.

$t = \frac{r}{6}$.

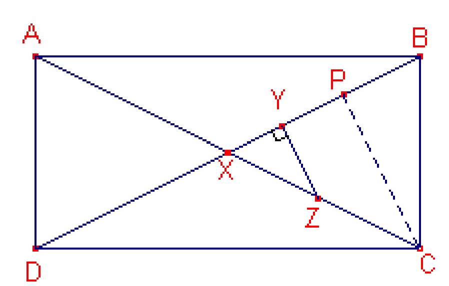
Notem que les 8 circumferències menudes tenen el mateix radi.

364.- Siga X la intersecció de les diagonals del rectangle ABCD.
Siga Z un punt de $\overline{XC}$, i siga Y la projecció de Z sobre $\overline{XB}$.
Si $\overline{XY} = 3$ i $\overline{YZ} = 4$, calculeu $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$.



Solució 1:

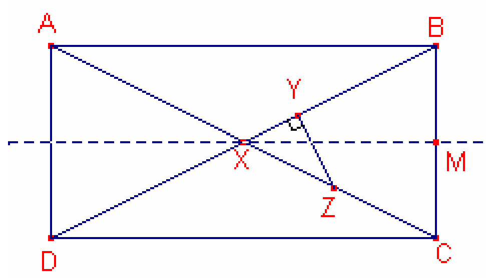
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{XYZ}$:
$\overline{XZ} = 5$.
Siga P la projecció de C sobre $\overline{XB}$.
Els triangles $\overset{\Delta}{XYZ}$, són semblants.
Siga $\overline{XP} = 3x$, $\overline{CP} = 4x$, $\overline{CX} = 5x$.
$\overline{PB} = 2x$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CPB}$:
$\overline{BC} = \sqrt{(4x)^2 + (2x)^2} = 2x\sqrt{5}$.
$\overline{AC} = 2 \cdot \overline{XC} = 10x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{BC} = \sqrt{(10x)^2 - \left(2x\sqrt{5}\right)^2} = 4x\sqrt{5}$.
$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{4x\sqrt{5}}{2x\sqrt{5}} = 2$.

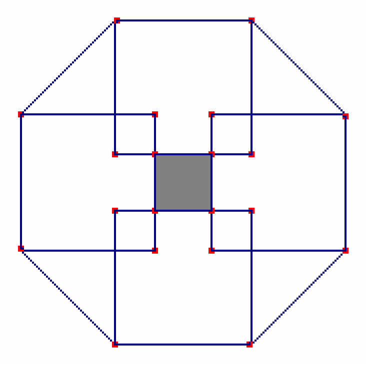
Solució 2:
Siga $\alpha = \angle BXC$. Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{XYZ}$:
$\overline{XZ} = 5$.



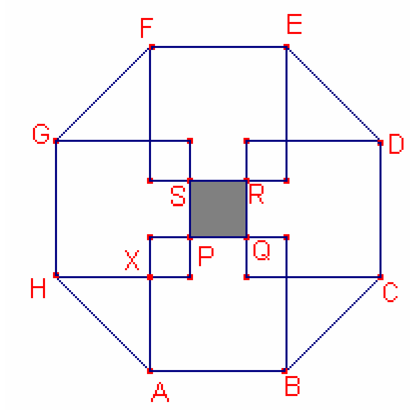
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{XYZ}$:
$\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$.
$\angle BXM = \dfrac{\alpha}{2}$.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{XM}}{\overline{BM}} = \text{ctg}\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}} = 2.$$

365.- Sobre quatre costats d'un octògon regular de costat 1 de la figura s'han dibuixat quatre quadrats interiors a l'octògon. Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:
Siga ABCDEFGH l'octògon de costat 1.
La zona ombrejada és un quadrat PQRS.
Siga X la intersecció de les diagonals $\overline{AF}$, $\overline{CH}$
Siga $x=\overline{AX}=\overline{HX}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AXH}$:

$x^2+x^2=1^2$.

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

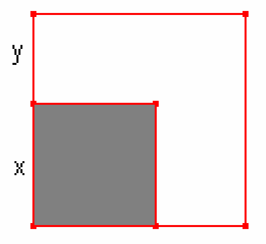
$\overline{AF}=2\cdot\overline{AX}+\overline{AB}=1+\sqrt{2}$.

$\overline{PS}=\overline{AF}-2\cdot\overline{AB}=\sqrt{2}-1$.

$S_{PQRS}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2=3-2\sqrt{2}$.

366.- En la figura hi ha dos quadrats l'àrea del quadrat menut és la tercera part de l'àrea del quadrat gran.

Calculeu $\frac{x}{y}$.



Solució:
Dos quadrat són semblants la raó de les àrea és igual al quadrat de la raó dels costats:

$$\left(\frac{x+y}{x}\right)^2 = 3.$$

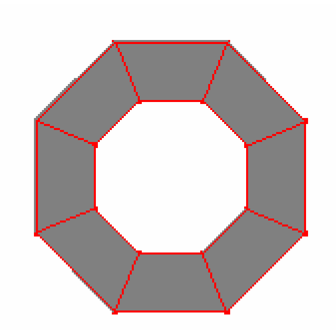
$$\frac{x+y}{x} = \sqrt{3}.$$

$$1+\frac{y}{x} = \sqrt{3}.$$

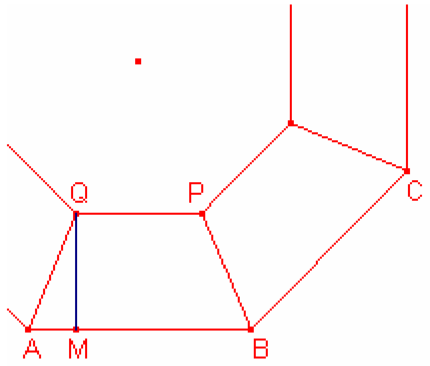
$$\frac{y}{x} = \sqrt{3}-1.$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

367.- La figura octogonal s'ha construït adherint 8 trapezis isòsceles iguals de manera que tots els costats menors del trapezi mesuren 1.
Calculeu el costat de l'octògon regular exterior.



Solució:



Siga $x=\overline{AB}$ costat de l'octògon regular exterior.
Considerem el trapezi isòsceles ABPQ tal que

$\overline{AQ}=\overline{PQ}=\overline{BP}=1$.

L'angle interior d'un octògon regular mesura $\angle ABC=135^{o}$.

$\angle ABP=\dfrac{135^{o}}{2}$.

Siga M la projecció de Q sobre el costat $\overline{AB}$

$\overline{AM}=\dfrac{x-1}{2}$.

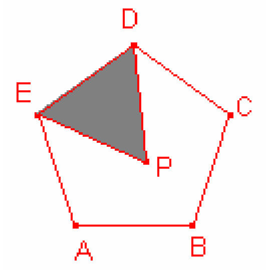
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMQ}$:

$\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AQ}}=\cos\dfrac{135^{o}}{2}$.

$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, resolent l'equació:

$x=1+\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

368.- Siga P un punt interior del pentàgon regular ABCDE tal que el triangle $\overset{\Delta}{DEP}$ és equilàter. Determineu la mesura de l'angle $\angle APB$.



Solució:

L'angle interior d'un pentàgon regular mesura $\angle AED = 108^o$.

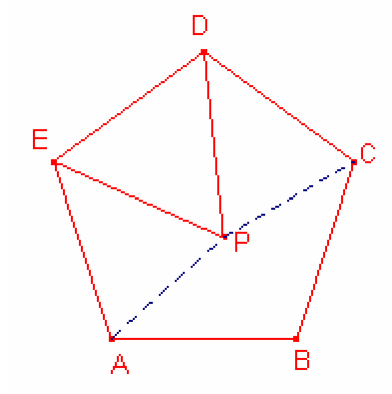
$\angle AEP = 108^o - 60^o = 48^o$.

$\overline{AE} = \overline{EP}$.

Aleshores, $\angle APE = \dfrac{180^o - 48^o}{2} = 66^o$.

$\angle CP = 48^o$.

$\overline{AE} = \overline{DP}$.



Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{APE}$, $\overset{\Delta}{PCE}$ són iguals, aleshores,

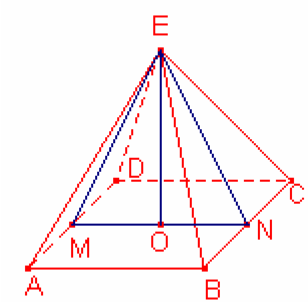
$\overline{AP} = \overline{CP}$,

$\angle APC = 360^o - (\angle DPE + 2 \cdot \angle APE) = 360^o - (60^o + 2 \cdot 66^o) = 168^o$.

Com que $\overline{AP} = \overline{CP}$, $\overline{AB} = \overline{BC}$, aleshores, $\angle APB = \dfrac{1}{2} \angle APC = 84^o$.

369.- Donada una piràmide de base quadrada i que totes les seues arestes mesuren 2, determineu el radi de la màxima esfera interior a la piràmide.

Solució:



Siga ABCDE la piràmide de base quadrat ABCD.
Les cares laterals de la piràmide són triangles equilàters de costat 2.
Siga O el centre del quadrat ABCD.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AD}$.
Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.
L'esfera de radi màxim la seua circumferència màxima ha de ser inscrita en el triangle $\overset{\Delta}{MNE}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ENC}$:

$\overline{NE} = \overline{ME} = \sqrt{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EON}$:

$\overline{OE} = \sqrt{2}$.

Siga r el radi de la circumferència inscrita del triangle $\overset{\Delta}{MNE}$.

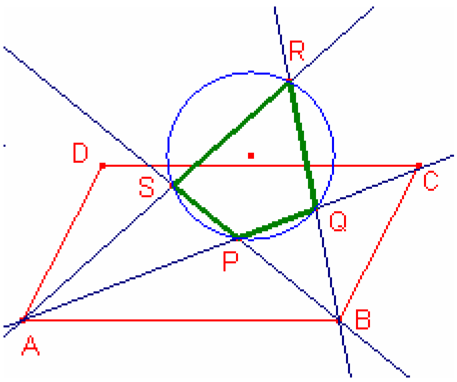
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MNE}$ $S_{MNE} = \frac{\overline{MN} + 2\overline{ME}}{2} r = \frac{\overline{MN} \cdot \overline{OE}}{2}$:

$\frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} r = \frac{2\sqrt{2}}{2}$. Resolent l'equació:

$r = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.

370.- Les interseccions de les rectes que trisecten els angles A i B (distintes de A i B) d'un paral·lelogram ABCD formen un quadrilàter inscriptible.

Solució:



Siga el quadrilàter PQRS format per les interseccions de les quatre rectes.
Calculem els angles $\angle APB = \angle SPQ$ i $\angle ARB = \angle SRQ$ són suplementaris.
Siga $A = 3\alpha$.
$B = 180^\circ - A = 180^\circ - 3\alpha$.
$\angle PAB = \frac{3\alpha}{3} = \alpha$, $\angle ABP = \frac{180^\circ - 3\alpha}{3} = 60^\circ - \alpha$.
$\angle APB = 180^\circ - (\angle PAB + \angle ABP) = 120^\circ$.

$\angle RAB = 2\frac{3\alpha}{3} = 2\alpha$, $\angle ABR = 2\frac{180^\circ - 3\alpha}{3} = 120^\circ - 2\alpha$.
$\angle ARB = 180^\circ - (\angle RAB + \angle ABR) = 60^\circ$.
Aleshores, $\angle APB = \angle SPQ$ i $\angle ARB = \angle SRQ$ són suplementaris.
Aplicant el teorema de Tolomeu, el quadrilàter PQRS és inscriptible en una circumferència.