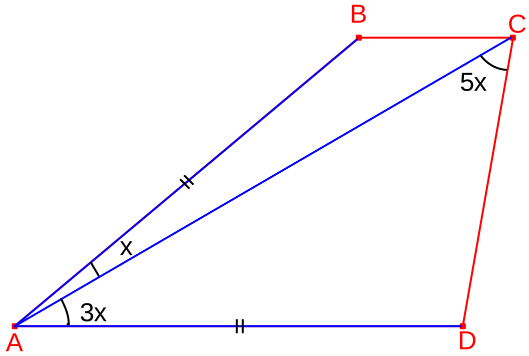
3691.- Siga el trapezi ABCD de costats paral·lels $\overline{AD}, \overline{BC}$, $\overline{AB} = \overline{AD}$
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:
Siga $\overline{AC} = d, \overline{AD} = \overline{AB} = b$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ADC}$:

$$\frac{d}{\sin 8x} = \frac{b}{\sin 5x}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{d}{\sin 4x} = \frac{b}{\sin 3x}$$

Dividint ambdues expressions:

$$\frac{\sin 4x}{\sin 8x} = \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$$

$$\frac{1}{2 \cdot \cos 4x} = \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$$

$$\sin 5x = 2 \cdot \sin 3x \cdot \cos 4x$$

$$\sin 5x = -\sin x + \sin 7x$$

$$\sin x = \sin 7x - \sin 5x$$

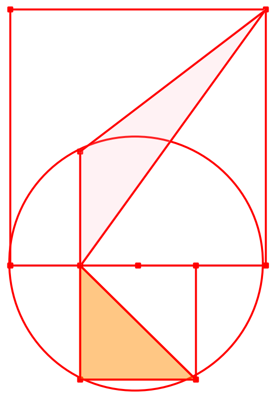
$$\sin x = 2 \cdot \cos 6x \cdot \sin x$$

$$\cos 6x = \frac{1}{2}$$

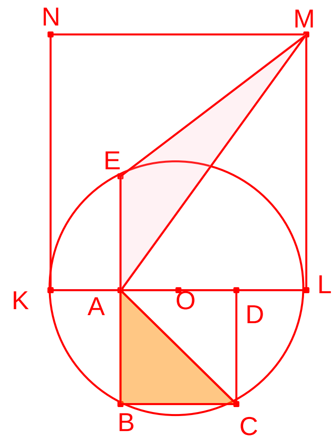
$$6x = 60°$$

$$x = 10°$$

3692.- La figura està formada per un cercle i dos quadrats.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos triangles ombrejats.



Solució:
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = 2R$, diàmetre de la circumferència.
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2x$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BAO}$

$R^2 = 5x^2$

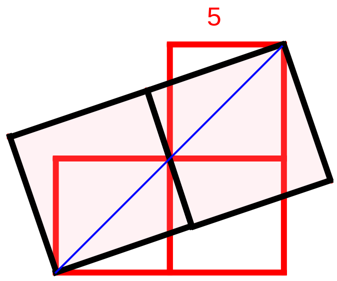
$x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}R$

$\overline{AL} = x + R = \dfrac{5+\sqrt{5}}{5}$

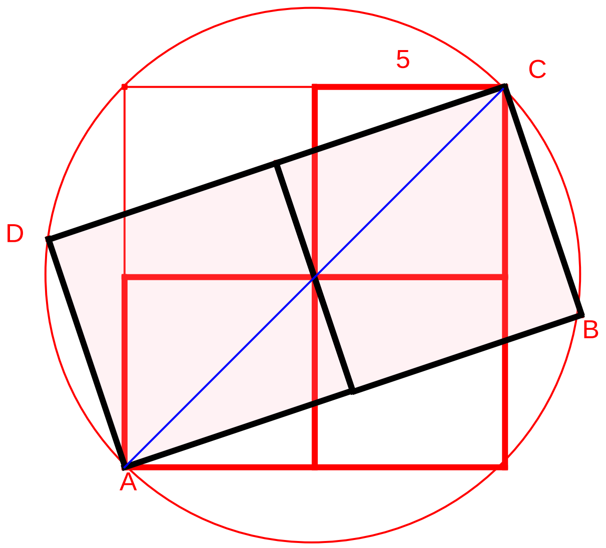
La proporció d’àrees és:

$$\frac{S_{AEM}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x\cdot \overline{AL}}{\frac{1}{2}\cdot 4x^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

3693.- La figura està formada per cinc quadrats tres d'ells de costat 5.
Calculeu l'àrea ombrejada pels dos altres quadrats



Solució:

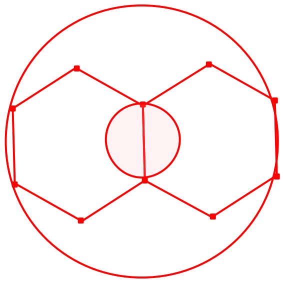


AC=2·5·sqrt(2)=sqrt(5)·c

c=2·sqrt(10)

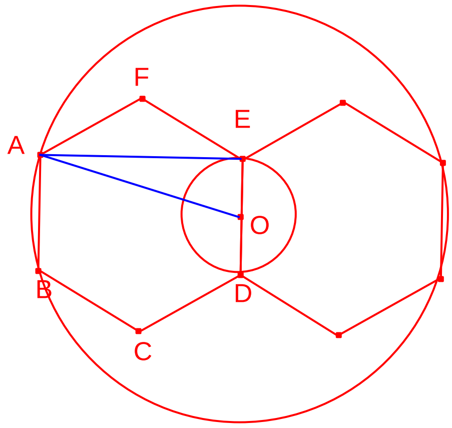
[ABCD]=2c²=80

3694.- La figura està formada per dos circumferències i dos hexàgons regulars iguals. Calculeu la proporció entre les àrees dels dos cercles.

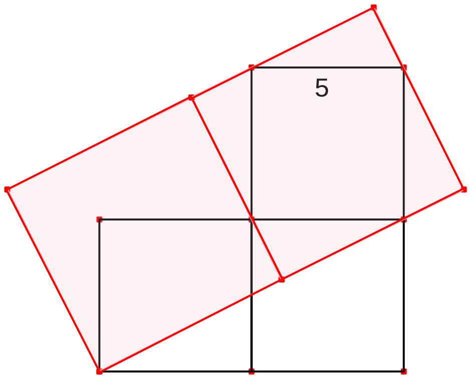


Solució:

Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 2$
Siga O el punt mig del costat $\overline{DE}$, centre de les dues circumferències.
Siga $\overline{OA} = R$, radi de la circumferència exterior.
Siga $\overline{OE} = 1$, radi de la circumferència interior.
$\overline{AE} = 2\sqrt{3}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEO}$:
$R^2 = 13$
La proporció entre les àrees dels cercles és:
$\frac{S_1}{S_R} = \frac{1}{R^2} = \frac{1}{13}$

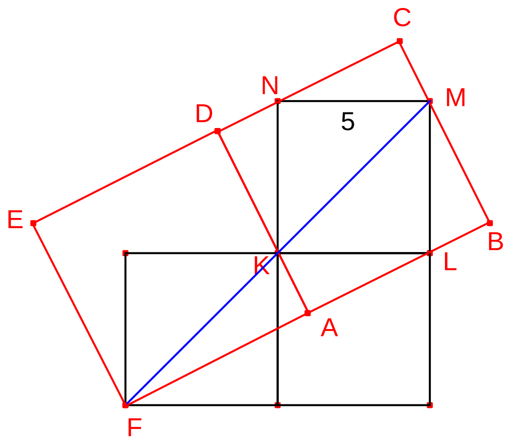


3695.- La figura està formada per cinc quadrats tres d'ells de costat 5.
Calculeu l'àrea ombrejada pels dos altres quadrats

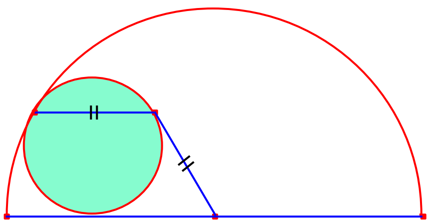


Solució:
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = 5$
Siga els quadrats $ABCD, ADEF$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga $\overline{CM} = \overline{DN} = a$
$\overline{CN} = c - a = \sqrt{25 - a^2}$
Simplificant:
$c^2 + 2a^2 - 2ac = 25$

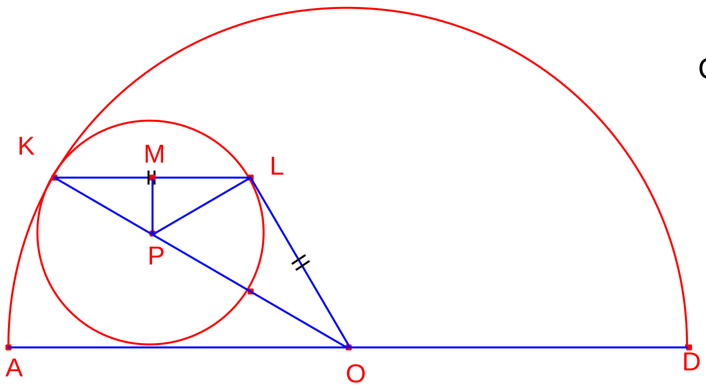
$\overline{FA} = 5\sqrt{5}$
$\overline{FA} = 5\sqrt{5} + a = 2c$
$a = 2c - 5\sqrt{5}$
$c^2 + 2\left(2c - 5\sqrt{5}\right)^2 - 2c\left(2c - 5\sqrt{5}\right) = 25$
$c^2 - 6\sqrt{5}c + 45 = 0$
Resolent l'equació:
$c = 3\sqrt{5}$
L'àrea ombrejada és:
$S_{FBCE} = 2c^2 = 90$



3696.- Un semicercle conté un cercle tangent.
El segment tangent al cercle des del centre és igual al segment que uneix el punt de tangència del cercle i el punt de tangència del segment són iguals.
Calcular la proporció entre l'àrea del cercle i l'àrea del semicercle.



Solució:



OA=R, PK=r

KMP, OLP semblants

OP=2·PK

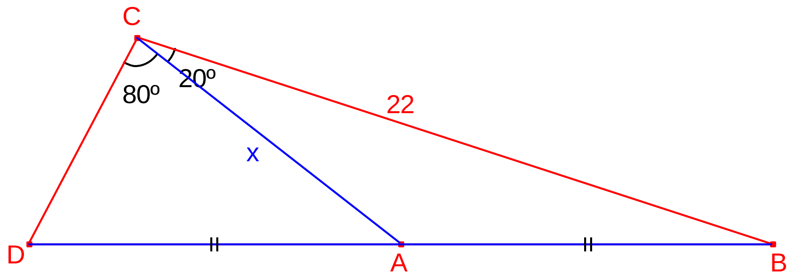
R-r=2r

R=3r

Proporció:

$r^2/(1/2)R^2=2/9$

3697.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{DBC}, \overline{BC} = 22$
Siga A el punt mig del costat $\overline{BD}$ tal que $\angle DCA = 80°, \angle ACB = 20°$
Calculeu la mesura de $x = \overline{AC}$



Solució:
Siga $\alpha = \angle DBC$
siga $a = \overline{DA} = \overline{AB}$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$\frac{a}{\sin 20°} = \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{22}{\sin(22° + \alpha)}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{DAC}$

$$\frac{a}{\sin 80°} = \frac{x}{\sin(80° - \alpha)}$$

Dividint les expressions:

$$\frac{\cos 10°}{\sin 20°} = \frac{\sin(80° - \alpha)}{\sin \alpha}$$

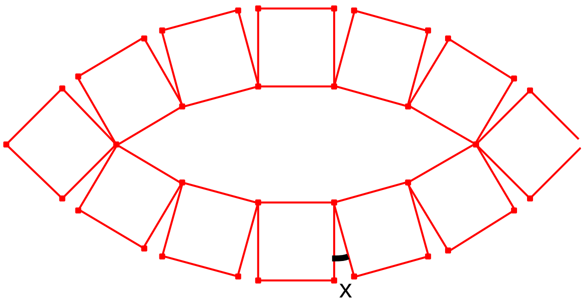
$$\sin \alpha = 2 \cdot \sin 10° \cdot \sin(80° - \alpha)$$

$$\sin \alpha = \cos(70° - \alpha) - \cos(90° - \alpha)$$

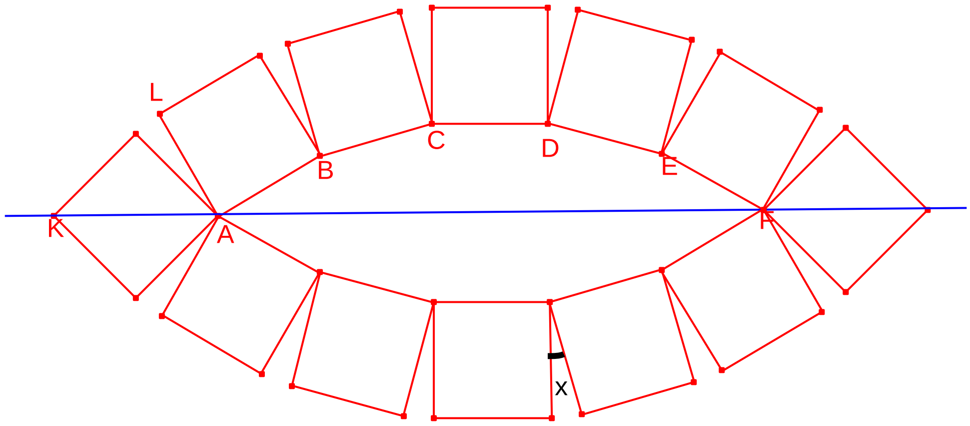
$$2 \cdot \sin \alpha = \sin(20° + \alpha)$$

$$x = \sin \alpha \cdot \frac{22}{\sin(20° + \alpha)} = 11$$

3698.- La figura està formada per dotze quadrats iguals.
Els angles que formen dos quadrats consecutius són iguals.
Calculeu la mesura d'aquest angle x

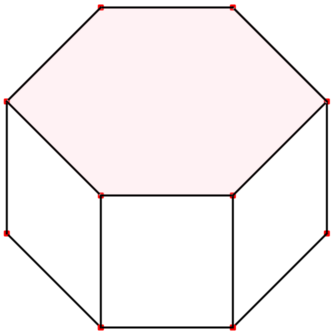


Solució:

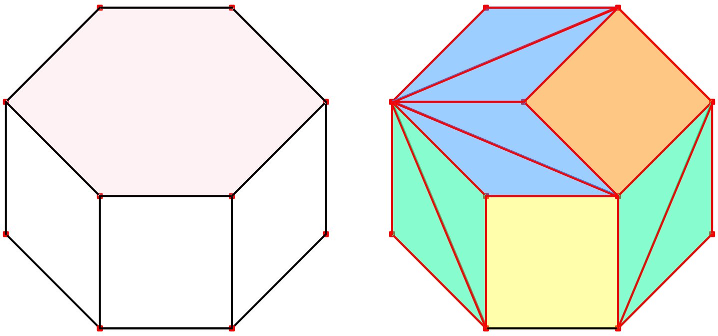


$\angle AKL = 45° + x$
$\angle BAF = \angle AFE = 45° - x$
$\angle ABC = 360° - 2 \cdot 90° - x = 180° - x$
$\angle BCD = \angle CDE = DEF = \angle ABC = 180° - x$
Considerem l'hexàgon convex ABCDEF.
La suma dels seus angles és:
$180°(6-2) = 2(45° - x) + 4(180° - x)$
Resolent l'equació:
$x = 15°$

3699.- La figura està formada per un octògon regular, un quadrat i un hexàgon ombrejat.
Calculeu la proporció entre l’àrea ombrejada i l’àrea de l’octògon regular.



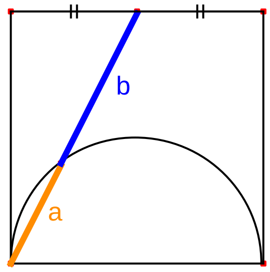
Solució:



La proporció és:

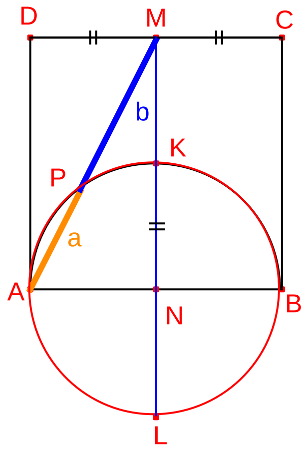
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{octògon}} = \frac{1}{2}$$

3700.- La figura està formada per un quadrat i una semicircumferència.



Calculeu la proporció dels segments:
$\frac{a}{b}$

Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre K i costat $\overline{AM} = 2$
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$
Siga N el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga $\overline{AP} = a, \overline{MP} = b$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANM}$:
$\overline{AM} = a + b = \sqrt{5}$
Aplicant la potència de M respecte de la circumferència de centre N i diàmetre $\overline{AB} = 2$:
$\overline{MP} \cdot \overline{MA} = \overline{MK} \cdot \overline{ME}$:
$b(a + b) = 1 \cdot 3$
$b\sqrt{5} = 3$
$b = \frac{3\sqrt{5}}{5}, a = \sqrt{5} - b = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
La proporció que cerquem és:
$\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$