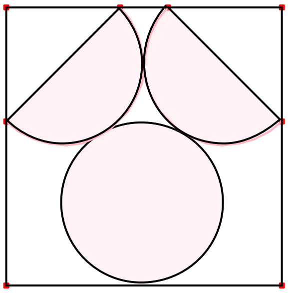
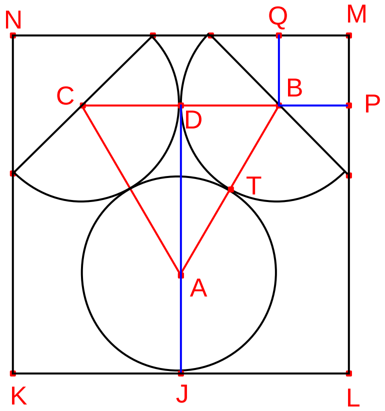
3711.- En un rectangle s'ha inscrit un cercle i dos quadrants del mateix radi.
Calculeu la proporció entre l'àrea de la zona ombrejada i l'àrea del rectangle.



Solució:



Siga el rectangle $KLMN$.
Siguen els centres A, B, C del cercle i dels semicercles de radis iguals a $\overline{AT} = 1$

Els tres centres formen un triangle equilàter de costat $\overline{AB} = \overline{BC} = 2$

$\overline{AJ} = 1, \overline{AD} = \sqrt{3}, \overline{BP} = \overline{BQ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

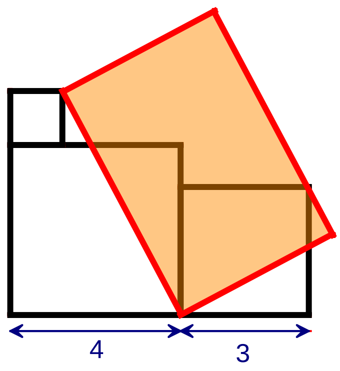
$\overline{LM} = \overline{AJ} + \overline{AD} + \overline{BQ} = 1 + \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{KL} = \overline{BC} + 2 \cdot \overline{BP} = 2 + \sqrt{2}$

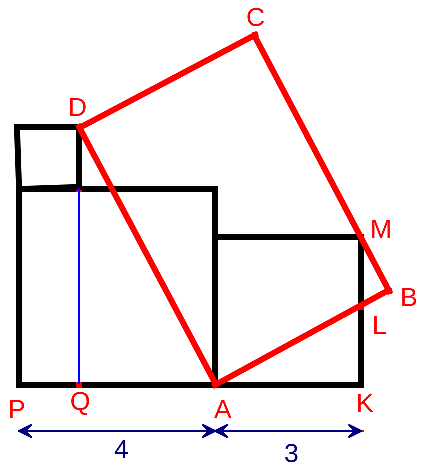
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{KLMN}} = \frac{2\pi}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{2\pi}{3+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}} \approx 0.5351$$

3712.- En la següent figura formada per tres quadrats i un rectangle, calculeu l'àrea del rectangle ombrejat.



Solució:
Siguen $\overline{PA}=4, \overline{KA}=3, \overline{PQ}=a$ costats dels tres quadrats.
Siga el rectangle $ABCD$.
Siga $\overline{AD}=b$
$\overline{AQ}=a+4, \overline{QA}=4-a$
$b^2=2a^2+32$

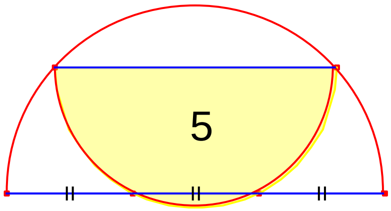


Siguen $\overline{KL}=x, \overline{AL}=y$

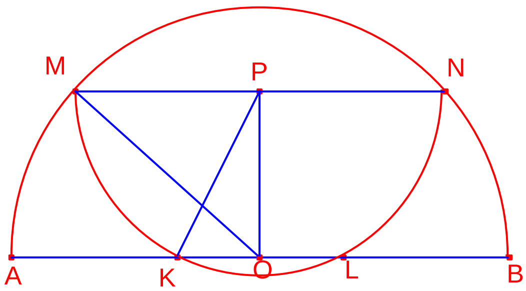
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DQA}, \overset{\Delta}{AKL}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$y=\frac{3b}{a+4}, x=\frac{3(4-a)}{a+4}$$

Siguen $\overline{LB}=z, \overline{LM}=t$
$$t=3-x=\frac{6a}{a+4}$$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DQA}, \overset{\Delta}{MBL}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$z=\frac{6a}{a+4}\cdot\frac{4-a}{b}$$
L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$$S_{ABCD}=b(y+z)=b\left(\frac{3b}{a+4}+\frac{6a}{a+4}\cdot\frac{4-a}{b}\right)=\frac{3b^2+6a(4-a)}{a+4}=\frac{96+24a}{4+a}=24$$

3713.- El diàmetre de la semicircumferència gran s'ha dividit en tres parts iguals.
L'àrea del semicercle menut és 5.
Calculeu l'àrea del semicercle gran.



Solució:



PM=r
(1/2)Pi·r²=5

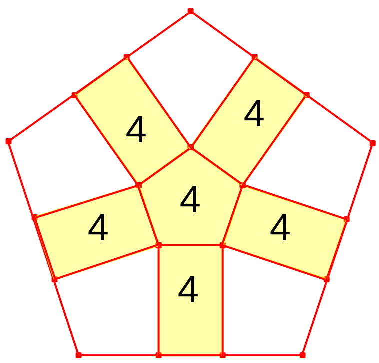
OA=R
OK=(1/3)R

Teorema Pitàgores MPO, KOP

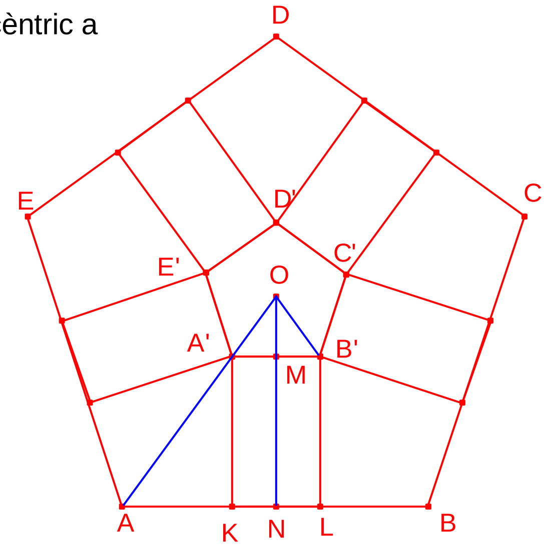
R²-r²=r²-R²/9
R²=(9/5)r²

S=(1/2)Pi·R²=(1/2)Pi·(9/5)r²=9

3714.- La figura està formada per dos pentàgons regulars i cinc rectangles.
Els polígons ombrejats tenen igual àrea 4.
Calculeu l'àrea del pentàgon regular exterior.

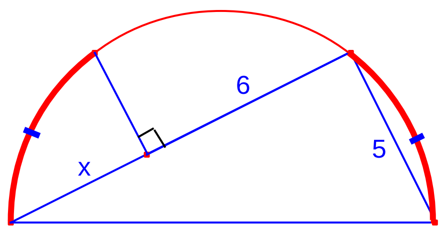


Solució:
Siga $ABCDE$ el pentàgon regular exterior.
Siga $A'B'C'D'E'$ el pentàgon interior de centre O (concèntric a l'anterior) i d'àrea 4
Siga $\overline{A'B'} = c$
Siguen $h = \overline{OM}, x = \overline{AK}$

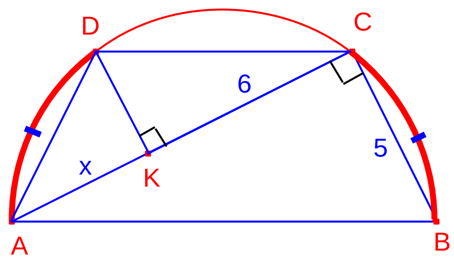


L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{A'B'O}$ és:
$$\frac{1}{2}ch = \frac{1}{5}4$$
$$h = \frac{8}{5c}$$
L'àrea del quadrat KLB'A' és 4
$$cx = 4$$
$$x = \frac{4}{c}$$
$$\overline{ON} = h + x = \frac{28}{5c}$$
Els triangles $\overset{\Delta}{A'MO}, \overset{\Delta}{ANO}$ són semblants i de raó $h : \overline{ON} = 2 : 7$
Els pentàgons regulars són semblants i de raó $2 : 7$
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{S_{ABCDE}}{S_{A'B'C'D'E'}} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$
$$S_{ABCDE} = 49$$

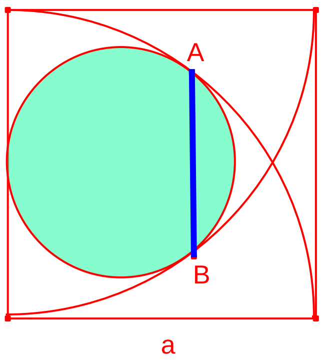
3715.- La circumferència està dividida en tres arcs, el dels extrems són iguals.
Calculeu la mesura del segment x.



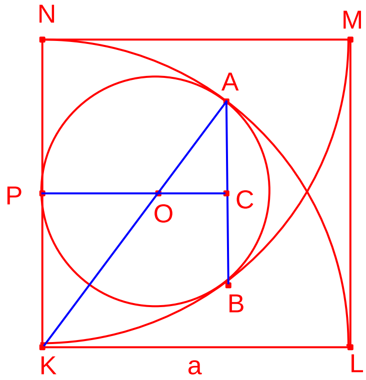
Solució:
Els angles inscrits $\angle BAC, \angle ACD$ són iguals.
$\overline{AD} = \overline{BC} = 5$
$\overline{DK} = \sqrt{25} - x^2$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ACB}, \overset{\Delta}{CKD}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{5}{x+6} = \frac{\sqrt{25-x^2}}{6}$$
$30 = (x+6)\sqrt{25-x^2}$
$x^4 + 12x^3 + 11x^2 - 300x = 0$
Resolent l'equació:
$x = 4$



3716.- En un quadrat de costat a, s'han dibuixat dos quadrants i la circumferència tangent als quadrats i al costat del quadrat (veure figura).
Calculeu la mesura del segments $\overline{AB}$



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga P el punt mig del costat $\overline{KN}$
Siga la circumferència tangent als quadrants de centre O i radi $\overline{OP} = r$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KPO}$:

$$(a-r)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2$$

Resolent l'equació;

$$r = \frac{3}{8}a$$

Siga C el punt mig del segment $\overline{AB}$.
Siga $x = \overline{AC}$

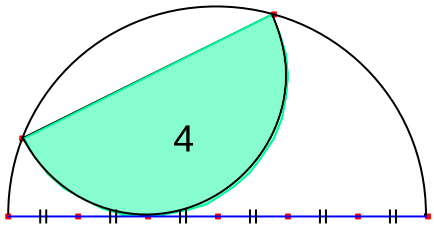
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{KPO}, \overset{\Delta}{ACO}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{r}{a-r} = \frac{\frac{3}{8}a}{\frac{5}{8}a} = \frac{3}{5}$$

$$x = \frac{3}{10}a$$

$$\overline{AB} = 2x = \frac{3}{5}a$$

3717.- El diàmetre de la semicircumferència gran s'ha dividit en sis parts iguals.
L'àrea del semicercle menut és 4.
Calculeu l'àrea del semicercle gran.



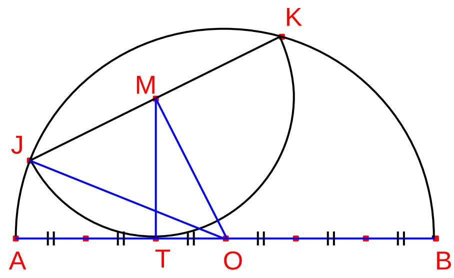
Solució:
Siga el semicercle menut de diàmetre $\overline{JK} = 2r$ i àrea 4.

$S_M = \frac{1}{2}\pi r^2 = 4$

Siga el semicercle gran de diàmetre $\overline{AB} = 2R$

Siga $\overline{OM} = a$

$\overline{OT} = \frac{1}{3}R$



Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles $\overset{\Delta}{MTO}, \overset{\Delta}{OMJ}$:

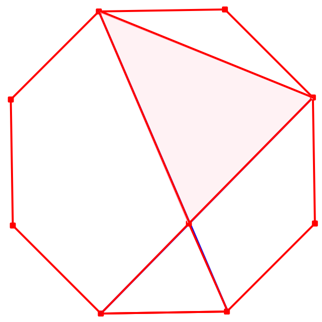
$a^2 = r^2 + \frac{1}{9}a^2 = R^2 - r^2$

$R^2 = \frac{9}{4}r^2$

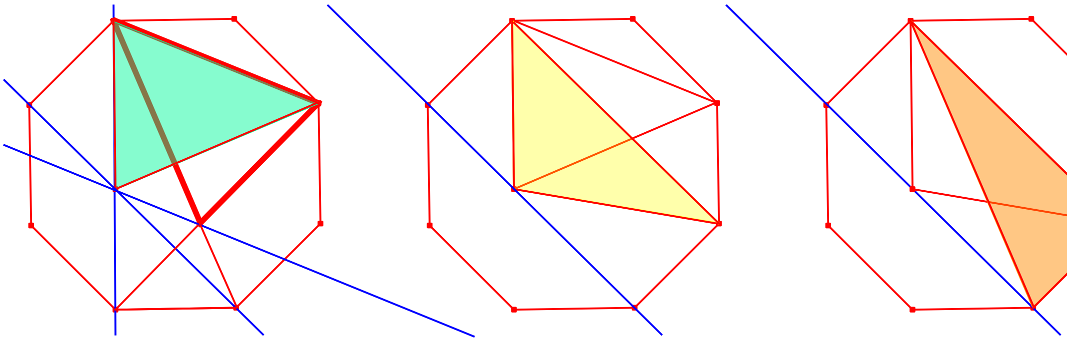
L'àrea del semicercle gran és:

$S_O = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2}\pi \frac{9}{4}r^2 = 9$

3718.- Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle ombrejat i l'àrea de l'octògon regular.

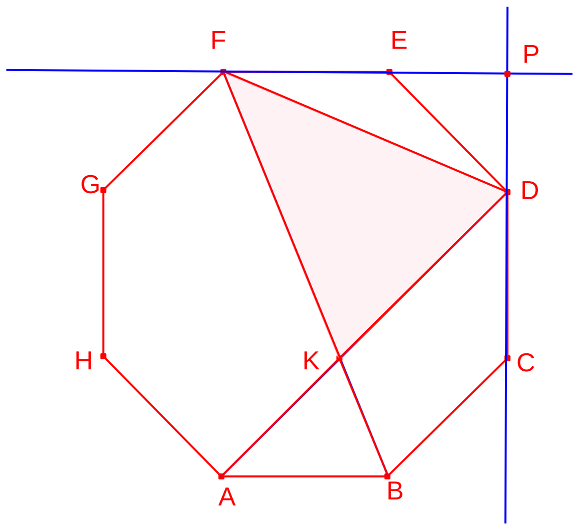


Solució 1:



La seqüència de triangles ombrejats tenen la mateixa àrea.
L'àrea del darrer és la quarta part de l'octògon regular.

Solució 2:



Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$ de costat $\overline{AB} = c$

$\angle BFD = 45°, \angle FDA = \dfrac{135°}{2}$

Aleshores:

$\angle FKD = \angle FDA = \dfrac{135°}{2}$

$\overline{DF} = \overline{KF}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{DEF}$:

$\overline{DF}^2 = \left(2+\sqrt{2}\right)c^2$

L'àrea del triangle ombrejat $\overset{\Delta}{KDF}$ és:

$S_{KDF} = \dfrac{1}{2}\overline{DF}^2 \cdot \sin 45° = \dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)c^2$

$\overline{DP} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}c$

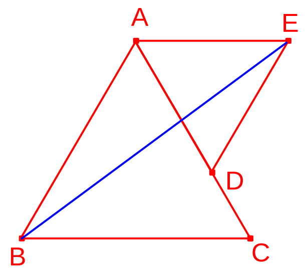
L'àrea de l'octògon regular és:

$S_{ABBCDEFGH} = \left(c + 2\cdot\overline{DP}\right)^2 - c^2 = 2\left(1+\sqrt{2}\right)c^2$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{KDF}}{S_{ABCDEFGH}} = \frac{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)c^2}{2\left(1+\sqrt{2}\right)c^2} = \frac{1}{4}$$

3719.- Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{ADE}$ tenen costats 6 i 4, respectivament.
Calculeu la mesura del segment $\overline{BE}$



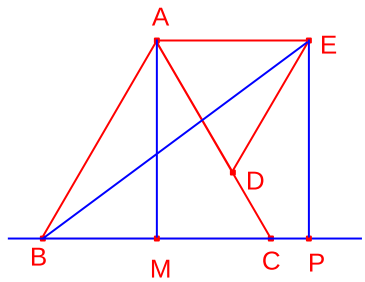
Solució 1:

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABE}$:

$$\overline{BE}^2 = 6^2 + 4^2 + 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 76$$

$$\overline{BE} = 2\sqrt{19}$$

Solució 2:
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

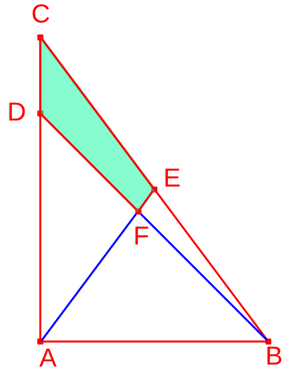


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMA}$:
$\overline{AM} = 3\sqrt{3}$
Siga P la projecció de E sobre la recta BC.
$\overline{MP} = \overline{AE} = 4$
$\overline{BE} = 7$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPE}$:

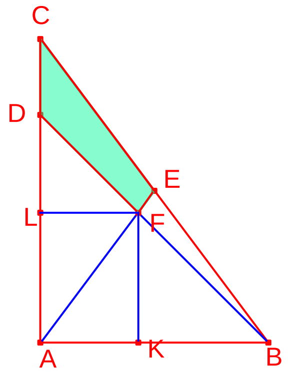
$$\overline{BE} = \sqrt{7^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$$

3720.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°, \overline{AB} = 3, \overline{BC} = 5$
Siga E un punt de la hipotenusa tal que $\overline{BE} = \overline{CE}$
Siga D un punt del catet $\overline{AC}$ tal que $\overline{CD} = 1$
Siga F la intersecció dels segments $\overline{AE}, \overline{BD}$
Calculeu l'àrea del quadrilàter $CDFE$.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$
$\overline{AC} = 4$
$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$
$S_{AEC} = \frac{1}{2} S_{ABC} = 3$



El triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és isòsceles.
Siga K la projecció de F sobre $\overline{AB}$
Siga L la projecció de F sobre $\overline{AC}$
El triangle rectangle $\overset{\Delta}{BKF}$ és isòsceles.
Siga $\overline{BK} = \overline{KF} = a$
$\overline{AK} = \overline{LF} = 3 - a$
$\overline{AE} = \overline{CE}$, aleshores $\angle CAF = \angle FCA$
Aleshores, $\angle AFK = \angle FCA$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{KAF}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{3 - a}{a} = \frac{3}{4}$
Resolent l'equació:
$a = \frac{12}{7}$
$3 - a = \frac{9}{7}$
$S_{ADF} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (3 - a) = \frac{27}{14}$
L'àrea del quadrilàter $CDFE$ és:
$S_{CDFE} = S_{AEC} - S_{ADF} = 3 - \frac{27}{14} = \frac{15}{14}$