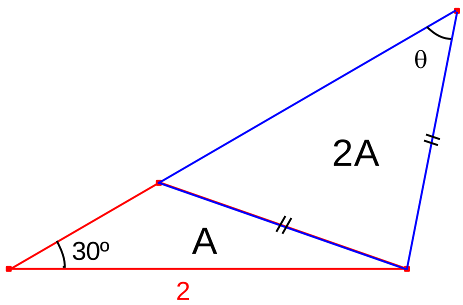
3721.- Un triangle s'ha dividit en dos triangles un té el doble d'àrea que l'altre.
Calculeu la mesura de l'angle $\theta$.




Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = 2, \angle BAC = 30°$

El triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és isòsceles.
Siga M el punt mig del segment $\overline{CD}$

El triangle $\overset{\Delta}{AMB}$ és rectangle.
$\overline{BM} = 1, \overline{AM} = \sqrt{3}$

Els triangles $\overset{\Delta}{DMB}, \overset{\Delta}{CMB}$ tenen la mateixa àrea.

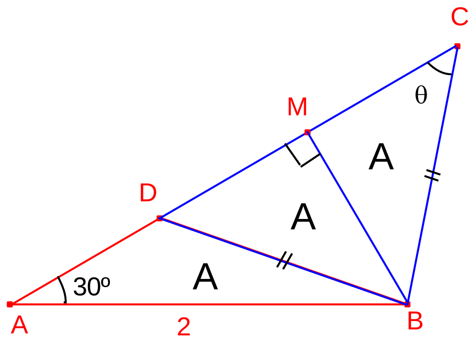
Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{DMB}, \overset{\Delta}{ADB}$ tenen la mateixa àrea.

$\overline{AD} = \overline{DM} = \overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

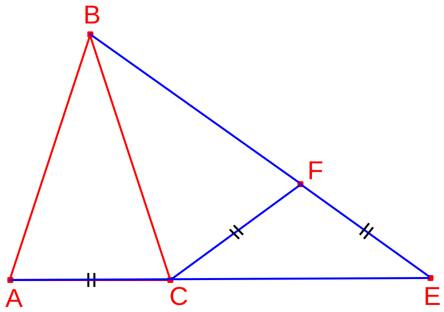
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CMB}$:

$\tan\theta = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

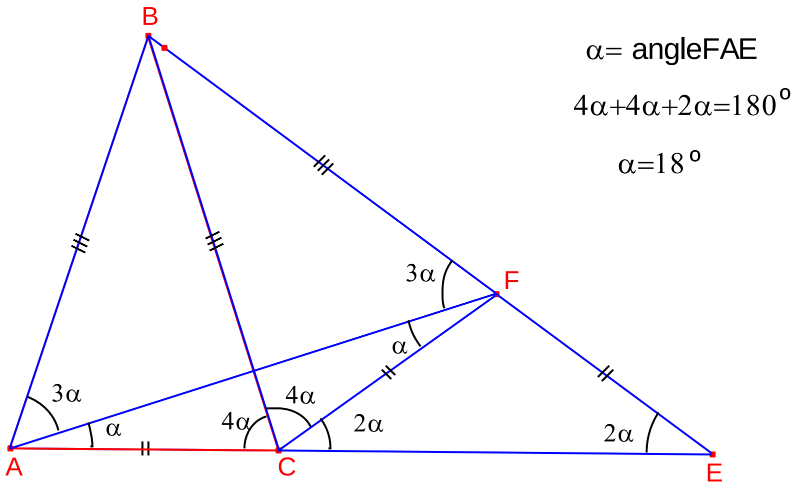
$\theta = \arctan\frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 49°\,6'\,24''$



3722.- Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = \overline{BC}$.
Siga el punt $D$ sobre l'extensió del costat $\overline{AC}$, on $C$ està entre $A$ i $E$.
Siga el punt $F$ sobre el segment $\overline{BE}$ de tal forma que $\overline{AC} = \overline{CF} = \overline{FE}$ i $\angle BAF = 3 \cdot \angle FAE$, com mostra la figura.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle FAE$

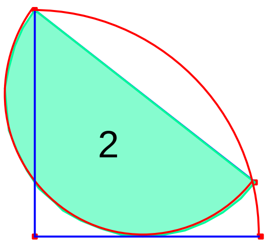



Solució:

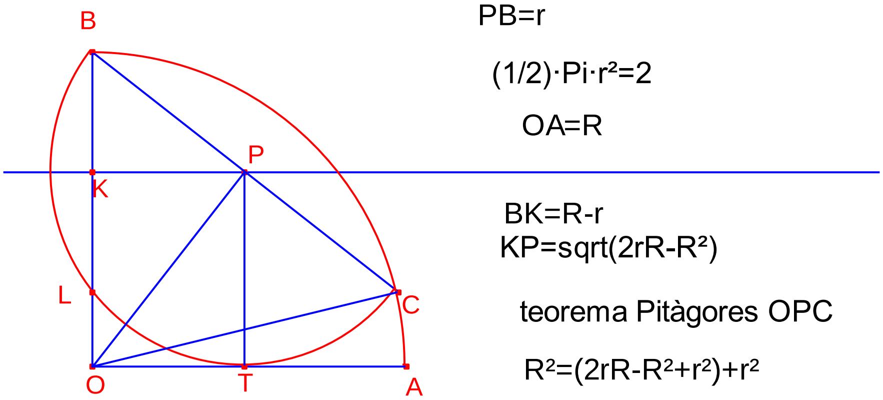



Siga $\angle FAE = \alpha, \angle BAF = 3\alpha$
$\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = \overline{BC}$, aleshores:
$\angle ACB = 4\alpha$
$\overline{AC} = \overline{CF}$, aleshores:
$\angle AFC = \alpha$
$\overline{FE} = \overline{CF}$, aleshores:
$\angle FCE = \angle FEC = 2\alpha$
$\angle BFC = 4\alpha$
$\angle AFB = 3\alpha$
$\overline{AB} = \overline{BF} = \overline{BC}$
$\angle BCF = 4\alpha$
$4\alpha + 4\alpha + 2\alpha = 180°$
$\alpha = \angle FAE = 18°$

3723.- La figura està formada per un semicercle d'àrea 2 i un quadrant.
El semicercle és tangent a un radi del quadrant.
Calculeu l'àrea del quadrant.




Solució:




PB=r

(1/2)·Pi·r²=2

OA=R

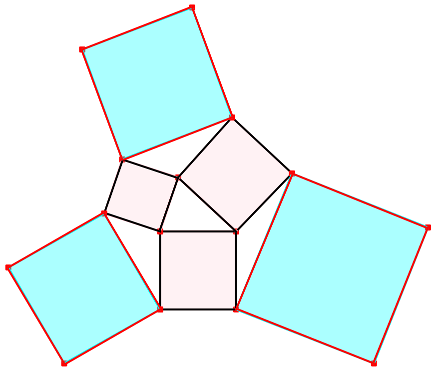
BK=R-r
KP=sqrt(2rR-R²)

teorema Pitàgores OPC

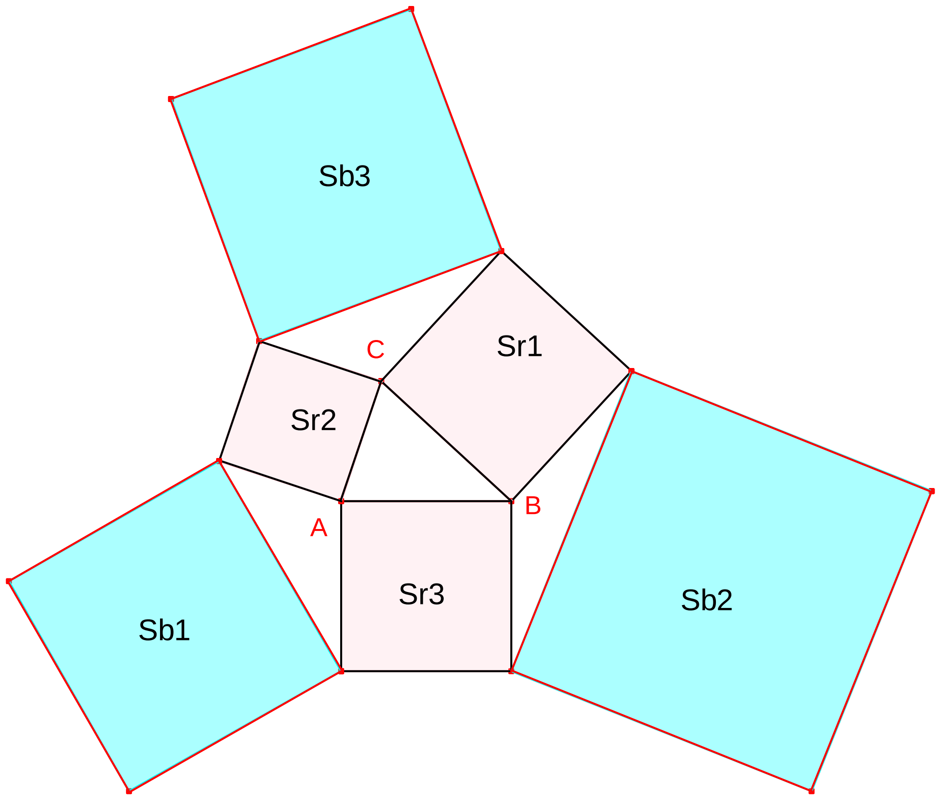
R²=(2rR-R²+r²)+r²

R=Phi·r
[Quadrant]=(1/4)Pi·R²=Phi²

3724.- Sobre els costats d'un triangle s'han dibuixat tres quadrats si sobre els vèrtexs consecutius altres tres quadrats.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea rosa.



Solució:




Aplicant el teorema del cosinus:

$S_{r1} = a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

$S_{r2} = b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$

$S_{r3} = c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

Sumant les tres expressions:

$S_{r1} + S_{r2} + S_{r3} = 2bc \cdot \cos A + 2ac \cdot \cos B + 2ab \cdot \cos C$

$S_{b1} = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A$

$S_{b2} = a^2 + c^2 + 2ac \cdot \cos B$

$S_{b3} = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos C$

Sumant les tres expressions:

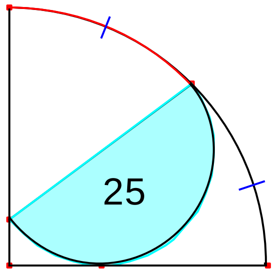
$S_{b1} + S_{b2} + S_{b3} = 2(S_{r1} + S_{r2} + S_{r3}) + 2bc \cdot \cos A + 2ac \cdot \cos B + 2ab \cdot \cos C$

$S_{b1} + S_{b2} + S_{b3} = 3(S_{r1} + S_{r2} + S_{r3})$

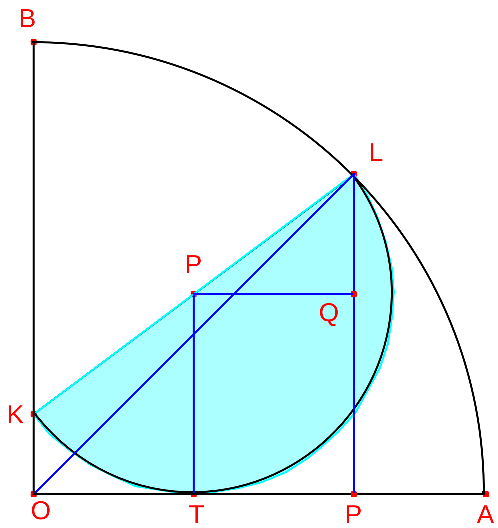
La proporció és:

$$\frac{S_{b1} + S_{b2} + S_{b3}}{S_{b1} + S_{b2} + S_{b3}} = 3$$

3725.- La figura està formada per un quadrant i un semicercle d'àrea 25.
Calculeu l'àrea del quadrant.




Solució:




PL=r

(1/2)Pi·r²=25

OA=R

angle LOP=45º

OP=(R/2)sqrt(2)

OT=TP=PQ=(R/4)sqrt(2)

QL=(R/2)sqrt(2)-r

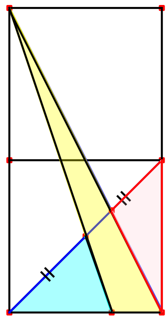
Teorema Pitàgores PQL

r²=(R²/8)+((R/2)sqrt(2)-r)²

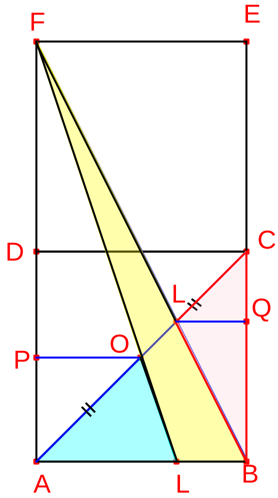
R/r=(8/5)sqrt(2)

[Quadrant]=(1/4)Pi·R²=64

3726.- La figura està formada per dos quadrats.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total.



Solució:




AB=2, AF=4
PF=3, OP=1

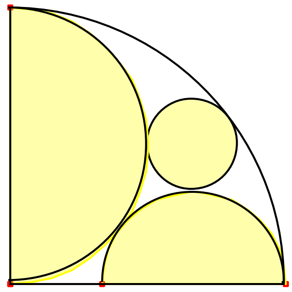
teorema Tales FPO, FAL

AL=4/3
BL=2/3

ALF, CLB semblans 2:1
LQ=2/3

[ombrejada]=[ALO]+[BCL]+[LBF]
[ombrejada]=2/3+2/3+4/3=8/3
[total]=8
[ombrejada]/[total]=1/3

3727.- La figura està formada per dos semicercles un cercle dins d'un quadrant.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrant exterior.

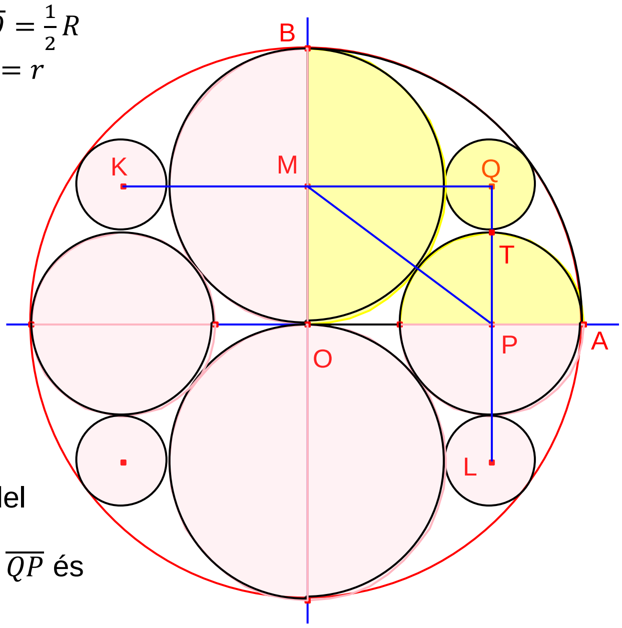


Solució:
Siga el quadrant de centre $O$ i radi $\overline{OA} = R$
Siga la semicircumferència de centre $M$ i radi $\overline{MO} = \frac{1}{2}R$
Siga la semicircumferència de centre $P$ i radi $\overline{PA} = r$
$\overline{MP} = \frac{1}{2}R + r, \overline{OP} = R - r$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $M\overset{\Delta}{O}P$:

$$\left(\frac{1}{2}R + r\right)^2 = \frac{1}{4}R^2 + (R - r)^2$$

Resolent l'equació:

$$r = \frac{1}{3}R$$




Siga la circumferència de centre $Q$ i radi $\overline{QT} = s$
Construïm la figura simètrica respecte els radis del quadrat.
Notem que $\overline{MQ}$ és perpendicular al radi $\overline{OB}$ i que $\overline{QP}$ és perpendicular al radi $\overline{OA}$

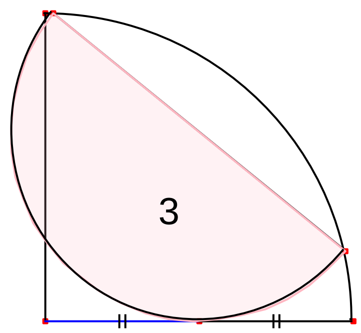
$$\overline{MQ} = \frac{1}{2}R + s = \frac{2}{3}R$$

$$s = \frac{1}{6}R$$

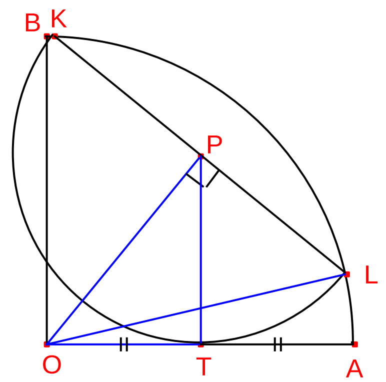
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{quadrant}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{2}r^2 + s^2}{\frac{1}{4}R^2} = \frac{\frac{1}{8}R^2 + \frac{1}{18}R^2 + \frac{1}{36}R^2}{\frac{1}{4}R^2} = \frac{5}{6}$$

3728.- La figura està formada per un semicercle d'àrea 3 i un quadrant.
El semicercle és tangent a un radi del quadrant en el punt mig.
Calculeu l'àrea del quadrant.




Solució:
Siga el quadrant de centre $O$ i radi $\overline{OA} = R$
Siga $T$ el punt mig del radi $\overline{OA}$
Siga el semicercle de centre $P$ i radi $\overline{PT} = r$ i àrea 3.




$$\frac{1}{2}\pi r^2 = 3$$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{OTP}, \overset{\Delta}{OPL}$:

$$r^2 + \frac{1}{4}R^2 = R^2 - r^2$$

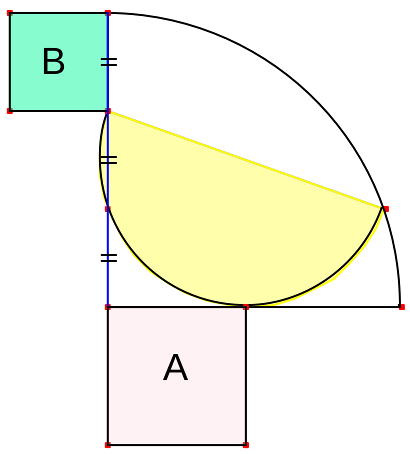
Resolent l'equació:

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{8}{3}$$

L'àrea del quadrant és:

$$S_{quadrant} = \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{1}{4}\pi\frac{8}{3}r^2 = 4$$

3729.- Un radi d'un quadrant s'ha dividit en tres parts iguals i s'ha dibuixat una semicircumferència tangent a l'altre radi.
Calculeu la proporció entre les àrees dels quadrats $A$: $B$




Solució:
Siga el quadrant de centre $O$ i radi $\overline{OJ} = R$
Siguen els punts $L, N$ del radi $\overline{OJ}$ tal que $\overline{ON} = \overline{NL} = \overline{LJ} = \frac{1}{3}R$
Siga $M$ el punt mig del radi $\overline{OJ}$
Siga la semicircumferència de centre $P$ i radi $\overline{PT} = \overline{PL} = \overline{PN} = r$
$\overline{PM}$ és perpendicular al radi $\overline{OJ}$

$$r = \overline{OM} = \frac{1}{2}R$$

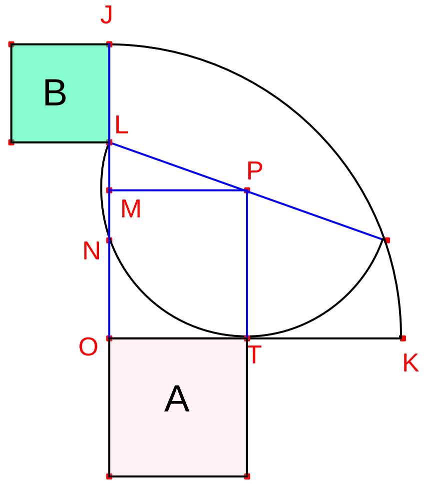
$$\overline{LM} = \frac{1}{6}R$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LMP}$:

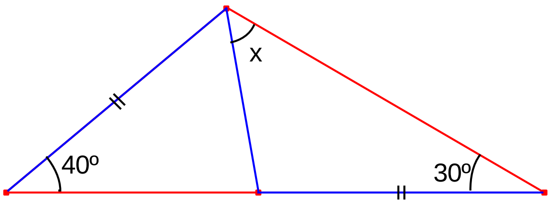
$$\overline{PM} = \overline{OT} = \sqrt{\frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{36}R^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}R$$

La proporció entre les àrees dels quadrats és:

$$\frac{A}{B} = \frac{\overline{OT}^2}{\overline{JL}^2} = \frac{\frac{2}{9}R^2}{\frac{1}{9}R^2} = 2$$

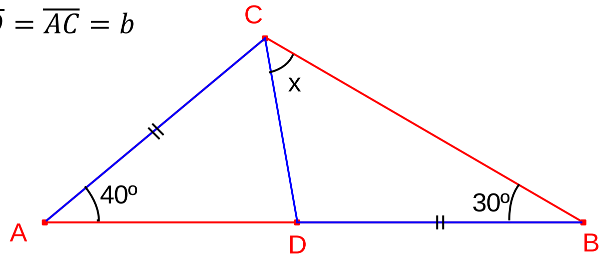


3730.- En el triangle de la figura calculeu la mesura de l'angle $x$




Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 40°, B = 30°$
Siga $D$ el punt del costat $\overline{AB}$ tal que $x = \angle DCB, \overline{BD} = \overline{AC} = b$
Siga $\overline{CD} = d$




$\angle ADC = 30° + x$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{CDB}$:

$$\frac{b}{\sin x} = \frac{d}{\sin 30°}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ADC}$:

$$\frac{b}{\sin(30° + x)} = \frac{d}{\sin 40°}$$

Dividint ambdues expressions:

$$\frac{\sin(30° + x)}{\sin x} = \frac{\sin 40°}{\sin 30°}$$

$\sin 40° \cdot \sin x = \sin 30° \cdot \sin(30° + x)$

$\cos(40° - x) - \cos(40° + x) = \cos x - \cos(60° + x)$

$\cos(40° - x) + \cos(60° + x) = \cos x + \cos(40° + x)$

Transformant en productes:

$\cos 50° \cdot \cos(10° + x) = \cos(20° + x) \cdot \cos 20°$

$\sin 40° \cdot \cos(10° + x) = \cos(20° + x) \cdot \cos 20°$

Aplicant la fórmula de l'angle doble:

$2 \sin 20° \cdot \cos(10° + x) = \cos(20° + x)$

Transformant en sumes:

$\sin(10° - x) + \sin(30° + x) = \cos(20° + x)$

$\cos(30° + x) = \cos(20° + x) - \cos(80° + x)$

Transformant en productes:

$\sin(30° + x) = 2 \sin(50° + x) \cdot \sin 30°$

$\sin(30° + x) = \sin(50° + x)$

$30° + x = 180° - (50° + x)$

Resolent l'equació:

$x = 50°$