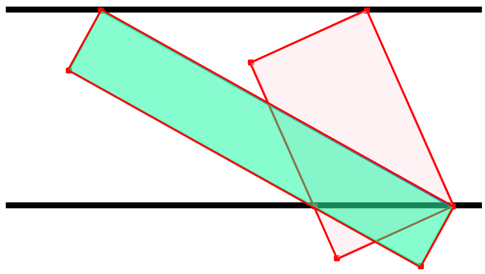
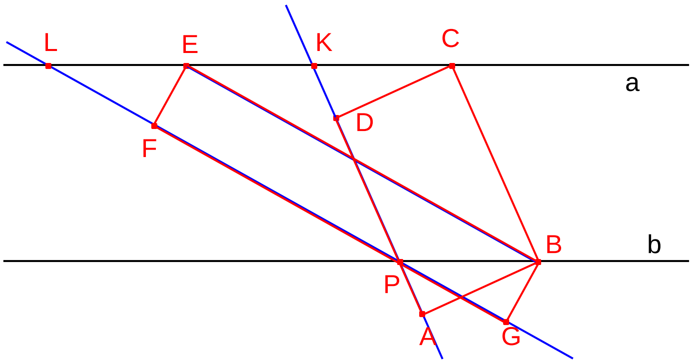
3731.- En la figura, les dues rectes són paral·lels.
Proveu que les àrees dels dos rectangles són iguals.



Solució:



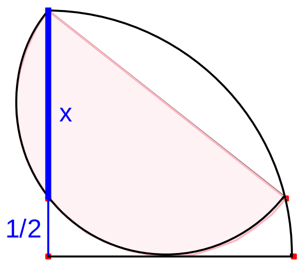
Siguen les rectes paral·leles a, b
Siguen els rectangles $ABCD, BEFG$
Siga P la intersecció de $\overline{AD}, \overline{FG}$
Siga K la intersecció de les rectes a, AD

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BAP}, \overset{\Delta}{CDK}$ són iguals.
Aleshores, les àrees del rectangle $ABCD$ i del paral·lelogram $PBCK$ són iguals.

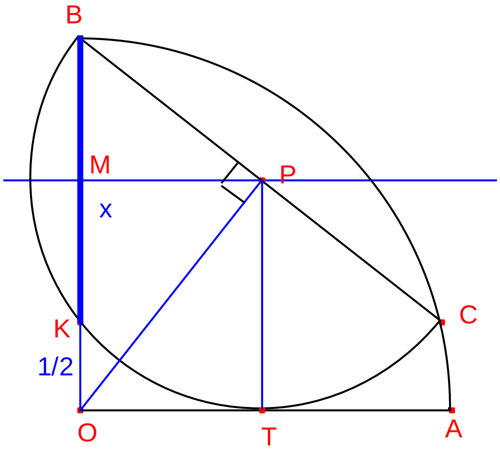
Siga L la intersecció de les rectes a, FG

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BGP}, \overset{\Delta}{EFL}$ són iguals.
Aleshores, les àrees del rectangle $BEFG$ i del paral·lelogram $PBEL$ són iguals.
Els paral·lelograms $PBCK, PBEL$ tenen la mateixa àrea ja que tenen la mateixa base i altura.
Aleshores, els rectangles $ABCD, BEFG$ tenen la mateixa àrea.

3732.- La figura està formada per un quadrant i un semicercle tangent a un radi del quadrant.
Calculeu la mesura del segment x



Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OB} = \frac{1}{2} + x$
Siga la semicircumferència de centre P i radi $\overline{PB} = \overline{PT}$
Siga M el punt mig del segment $\overline{BK} = x$
$\overline{PM}$ és perpendicular al radi $\overline{OB}$
$\overline{PT} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}x$



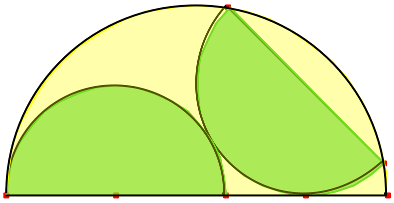
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PMB}, \overset{\Delta}{OPB}$ són semblants.
aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\frac{x+1}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{x+1}{2}}$$

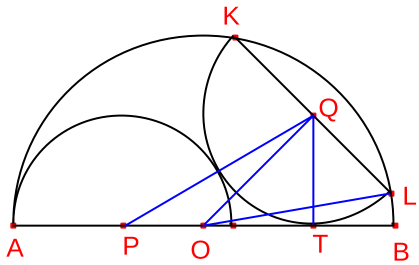
Simplificant:
$x^2 - x - 1 = 0$

$$x = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

3733.- En la figura, els dos semicercles verds són tangents i iguals i estan en l'interior d'un altre semicercle.
Calculeu la proporció entre l'àrea groga i la verda.



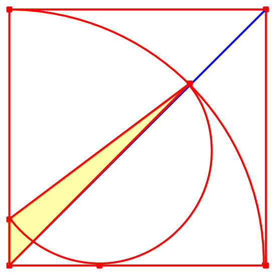
Solució:
Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$
Siga el semicercle de centre P i radi $\overline{PA} = r$
Siga el semicercle de centre Q i radi $\overline{QT} = \overline{QL} = r$
$\overline{PQ} = 2r$



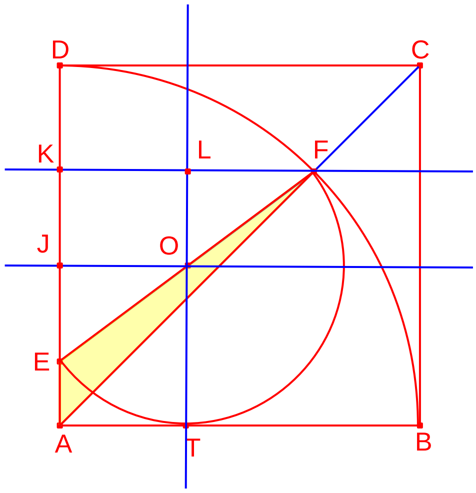
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PTQ}$:
$\overline{PT} = r\sqrt{3}$
$\overline{OT} = (1+\sqrt{3})r - R$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{OTQ}, \overset{\Delta}{OQL}$:
$r^2 + \left((1+\sqrt{3})r - R\right)^2 = R^2 - r^2$
$(3+\sqrt{3})r = (1+\sqrt{3})R$
$R = r\sqrt{3}$
La proporció entre les àrees és:
$$\frac{S_{groga}}{S_{verda}} = \frac{\frac{1}{2}R^2 - r^2}{r^2} = \frac{1}{2}$$

3734.- La figura està formada per un quadrat que conté un quadrant i un semicercle.
Calculeu la proporció entre les àrees del triangle ombrejat i el quadrat exterior.

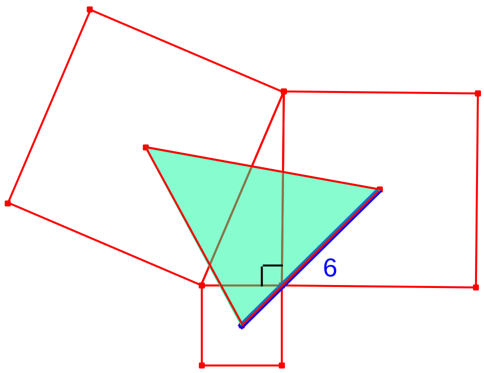


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga F la intersecció del quadrant i la diagonal $\overline{AC}$ del quadrat.
Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{EF} = 2r$
Siga T el punt de tangència del semicercle i el costat $\overline{AB}$
Siga K la projecció de F sobre el costat $\overline{AD}$

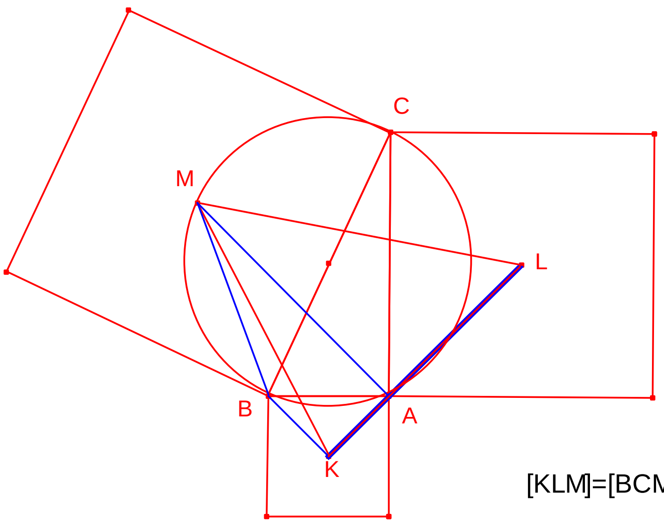


$\overline{AK} = \overline{KF} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
La recta OT talla la recta KF en el punt mig L del segment $\overline{KF}$
$\overline{LF} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \overline{OL} = \frac{\sqrt{2}}{2} - r$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OLF}$:
$r^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - r\sqrt{2} + r^2$
Resolent l'equació:
$r = \frac{5\sqrt{2}}{16}$
$\overline{KE} = 2 \cdot \overline{OL} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{16}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{8}$
$\overline{AE} = \overline{AK} - \overline{KE} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{8}$
L'àrea del triangle ombrejat és:
$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{KF} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{16}$
La proporció entre les àrees és:
$\frac{S_{AEF}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{16}$

3735.- Sobre els costats d'un triangle equilàter s'han dibuixat tres quadrats.
Els centres dels quadrats formen un triangle del qual un costat mesura 6.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



$angleBAM = angleMCB = 45º$

$angleKAM = 90º$

$[BKM] = [BKA] = c^2/4$

$[CLM] = [CLA] = b^2/4$

$AL = b\cdot sqrt(2)/2$

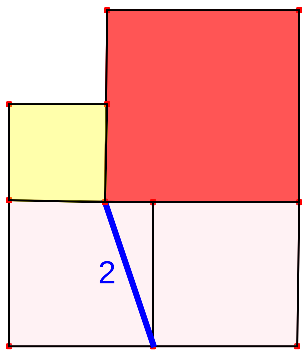
$AK = c\cdot sqrt(2)/2$

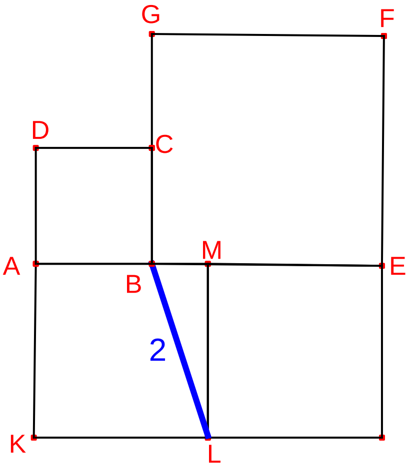
$b + c = 6\cdot sqrt(2)$

$[KLM] = [BCM] + [ACL] + [ABK] + [ABC] - [MBK] - [MCL]$

$[KLM] = a^2/4 + b^2/4 + c^2/4 + bc/2 - c^2/4 - b^2/4 = (b^2 + c^2 + 2bc)/4 = 18$

3736.- La figura està formada per quatre quadrats.
Si el segment assenyalat mesura 2, calculeu la suma de les àrees dels quadrats groc i roig.



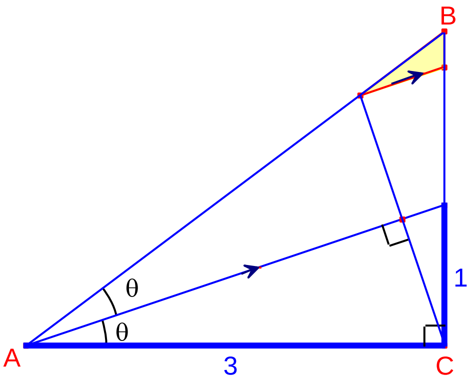


Solució:
Siga el quadrat $AKLM$ de costat $\overline{AM} = c$
Siga el quadrat groc $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga el quadrat roig $BEFG$ de costat $\overline{BE} = 2c - a$

$\overline{BM} = c - a$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BML}$:
$c^2 + (c - a)^2 = 4$
$a^2 - 2ac + 2c^2 = 4$

La suma de les àrees dels quadrats groc i roig és:
$S_{groc} + S_{roig} = a^2 + (2c - a)^2 = 2(a^2 - 2ac + 2c^2) = 2 \cdot 4 = 8$

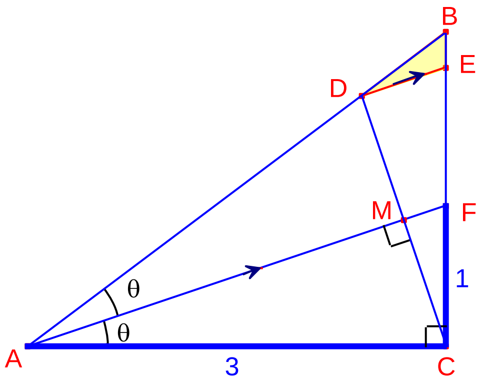
3737.- En la figura, calculeu la proporció entre l'àrea del triangle ombrejat i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACF}$:

$\overline{AF} = \sqrt{10}$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ACF}, \overset{\Delta}{AMC}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CM}}{1} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\overline{CM} = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \overline{CD} = 2 \cdot \overline{CM} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ACF}, \overset{\Delta}{CDE}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{DE}}{1} = \frac{\frac{3\sqrt{10}}{5}}{3}, \qquad \overline{DE} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{3}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$$

$$\tan 2\theta = \frac{3}{4} = \frac{\overline{BC}}{3}, \qquad \overline{BC} = \frac{9}{4}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AFB}$ és:

$$S_{AFB} = S_{ACB} - S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{9}{4} - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{15}{8}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AFB}, \overset{\Delta}{DEB}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{S_{DEB}}{S_{AFB}} = \left(\frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\sqrt{10}}\right)^2$$

$$S_{DEB} = \frac{1}{25} \cdot S_{AFE} = \frac{1}{25} \cdot \frac{15}{8} = \frac{3}{40}$$

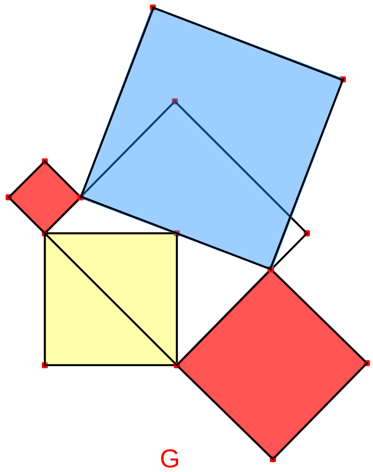
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{8}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{DEB}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{3}{40}}{\frac{27}{8}} = \frac{1}{45}$$

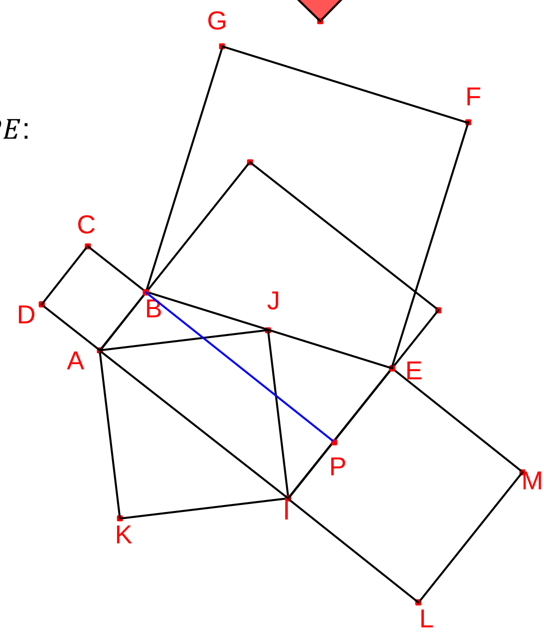
3738.- La figura està formada per cinc quadrats.
La suma de les àrees dels quadrats rojos és 8.
Calculeu l'àrea del quadrat de color blau.



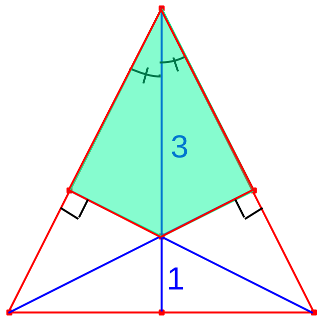
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
2Siga el quadrat $EILM$ de costat $\overline{EI} = b$
$a^2 + b^2 = 8$
Siga el quadrat $AKIJ$ de costat $\overline{AJ} = c$
Siga $\overline{BJ} = x$
Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = 2x$
Siga P la projecció de B sobre el costat $\overline{EI}$
$\overline{BP} = \overline{AI} = c\sqrt{2}, \overline{PE} = b - a$

aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPE}$:
$4x^2 = 2c^2 + (b-a)^2$
$2x^2 = c^2 + 4 - ab$
$\angle BAJ = \angle JIE = 45°$

Aplicant el teorema del cosinus als triangles $\overset{\Delta}{BAJ}, \overset{\Delta}{JIP}$:
$x^2 = a^2 + c^2 - 2ac\frac{\sqrt{2}}{2}$
$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc\frac{\sqrt{2}}{2}$
$c = \frac{a^2 + c^2 - x^2}{a} = \frac{b^2 + c^2 - x^2}{b} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = a + b$
$c^2 - ab = x^2$
$x^2 = 4$
L'àrea del quadrat blau $BEFG$ és:
$S_{BEFG} = 4x^2 = 16$

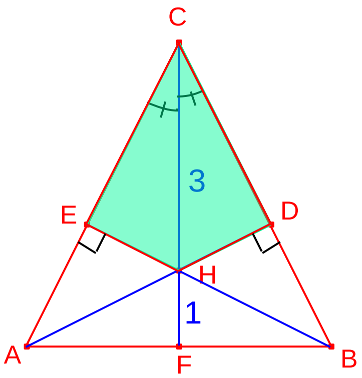


3739.- Calculeu l'àrea del quadrilàter ombrejat de la figura.



Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, \angle ACF = \angle BCF$
$\overline{BE}, \overline{AD}$ són altures del triangle.
$\overline{CF}$ és altura del triangle.
Aleshores, el triangle és isòsceles.
Siga $\overline{AF} = \overline{BF} = \frac{1}{2}c$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AFC}, \overset{\Delta}{HFA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{4}{\frac{1}{2}c} = \frac{\frac{1}{2}c}{1}$$

Resolent l'equació:
$c = 4$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{HFA}$:
$\overline{AH} = \sqrt{5}$
Siguen $\overline{EH} = x, \overline{CE} = y$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{HEC}, \overset{\Delta}{HFA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

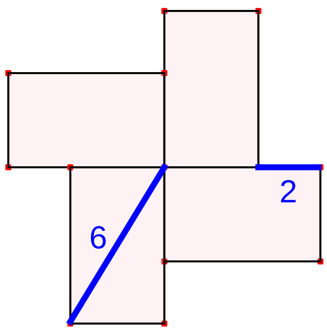
Resolent les equacions:

$$x = \frac{3\sqrt{5}}{5}, y = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

L'àrea del quadrilàter CEHD és:

$$S_{CEHD} = xy = \frac{3\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{18}{5}$$

3740.- El quatre rectangles de la figura són iguals.
Calculem l'àrea d'un d'ells.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costat $\overline{AD} = a, \overline{AB} = 2 + a$
Siga $\overline{BD} = 6$ la diagonal.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$a^2 + (a + 2)^2 = 36$
Simplificant:
$a(a + 2) = 16$
L'àrea del rectangle és:
$S_{ABCD} = a(a + 2) = 16$