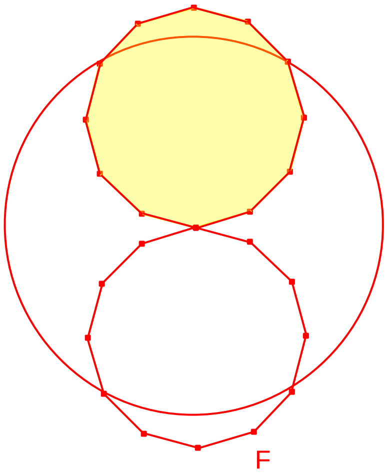
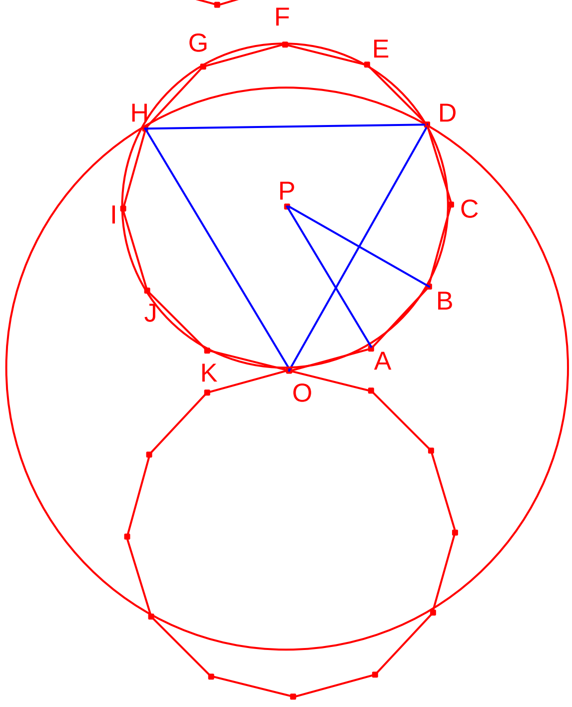
3741.- La figura està formada per una circumferència de radi 1 i un dodecàgon regular. Calculeu l'àrea del dodecàgon regular.



Solució 1:



Siga la circumferència de centre i radi 1.

Siga el dodecàgon regular $OABCDEFGHIJK$

Els vèrtexs O, D, H formen un triangle equilàter de costat 1

Siga P el centre del dodecàedre.

$\overline{OP} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

L'àrea del dodecàedre és:

$$S_{dodecàedre} = 12 \cdot S_{ABP} = 12 \cdot \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sin 30° = 1$$

Solució 2:

Siga la circumferència de centre i radi 1.

Siga el dodecàgon regular $OABCDEFGHIJK$

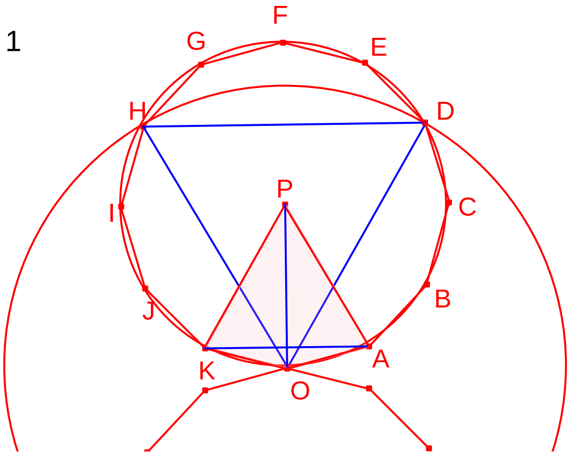
Els vèrtexs O, D, H formen un triangle equilàter de costat 1

Siga P el centre del dodecàedre.

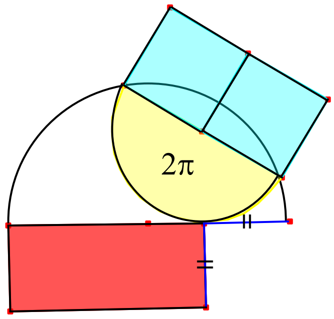
$\overline{OP} = \overline{KA} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

L'àrea del dodecàedre és:

$$S_{dodecàedre} = 6 \cdot S_{OAPK} = 6\frac{1}{2}\overline{OP} \cdot \overline{KA} = 6 \cdot \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}}{3} = 1$$



3742.- La figura està formada per dos semicercles, l'ombrejat d'àrea 2π, dos quadrats i un rectangle. Calculeu l'àrea del rectangle roig.



Solució:

Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AD} = 2R$

Siga la semicircumferència de centre L i radi $\overline{LM} = \overline{LB} = r$ d'àrea 2π:

$$\frac{1}{2}\pi r^2 = 2\pi$$

$$r^2 = 4$$

Siga $\overline{BD} = \overline{BC} = a$

Siga el rectangle roig $ABCD$ de costats $\overline{BC} = a, \overline{AB} = 2r - a$

Siga $\overline{OL} = b$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{OLM}, \overset{\Delta}{OBL}$:

$$b^2 = R^2 - r^2 = r^2 + (R - a)^2$$

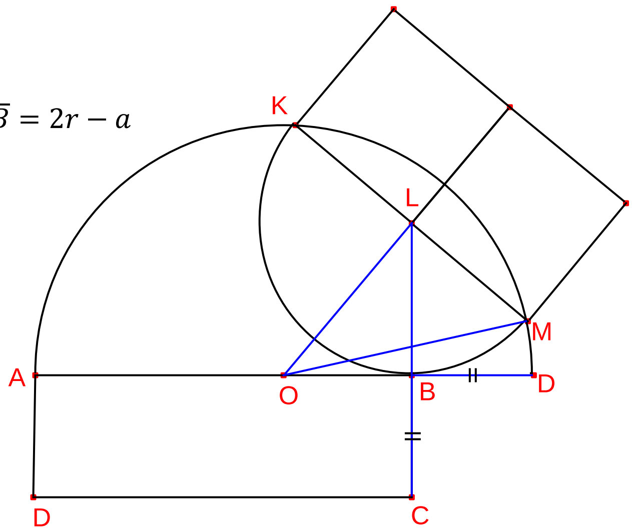
Simplificant:

$$2r^2 - 2aR + a^2 = 0$$

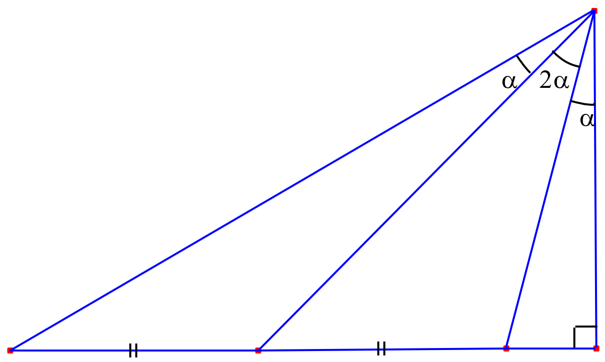
$$a(2R - a) = 2r^2 = 8$$

L'àrea del rectangle $ABCD$ és:

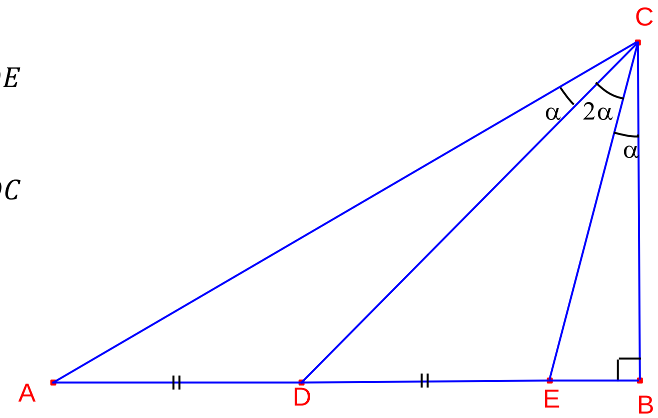
$$S_{ABCD} = a(2R - a) = 8$$



3743.- Determineu la mesura de l'angle α de la figura.



Solució:
$\angle AEC = 90° + \alpha, \angle CAB = 90° - 4\alpha$
Siga $\overline{AD} = \overline{DE} = x, \overline{CD} = y$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{CDE}$

$$\frac{y}{\cos\alpha} = \frac{x}{\sin 2\alpha}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ADC}$

$$\frac{y}{\cos 4\alpha} = \frac{x}{\sin\alpha}$$

Dividint ambdues expressions:

$$\frac{\cos 4\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}$$

Simplificant:

$$\cos 4\alpha = \frac{1}{2}$$

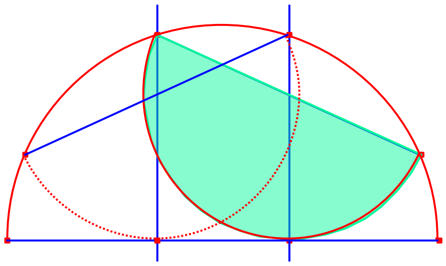
$$4\alpha = 60°$$

$$\alpha = 15°$$

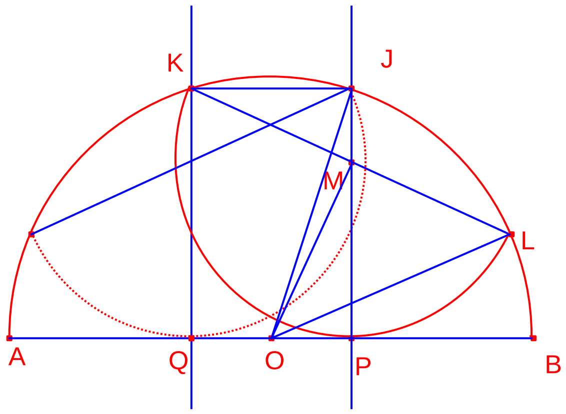
3744.- La figura està formada per tres semicercles. Els dos interiors són iguals.
La proporció entre l’àrea del semicercle ombrejat i el gran és:

$$\frac{a-\sqrt{c}}{b}$$

Determineu a, b, c



Solució:



Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$
Siga la semicircumferència de centre M i radi $\overline{MK} = \overline{MP} = r$
Siga $\overline{OP} = a, \overline{PQ} = 2a$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KJM}$:

$$\overline{JM} = \sqrt{r^2 - 4a^2}$$

$$\overline{PJ} = r + \sqrt{r^2 - 4a^2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OML}$:

$$\overline{OM} = \sqrt{R^2 - r^2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMP}$:

$$a^2 = R^2 - 2r^2$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPJ}$:

$$R^2 = a^2 + \left(r + \sqrt{r^2 - 4a^2}\right)^2$$

$$R^2 = R^2 - 2r^2 + \left(r + \sqrt{9r^2 - 4R^2}\right)^2$$

Simplificant:

$$7r^4 - 12r^2R^2 - 4R^2 = 0$$

Resolent l’equació:

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{6-\sqrt{8}}{7}$$

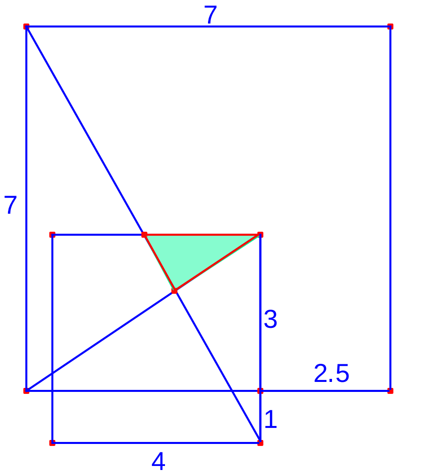
La proporció d’àrees és:

$$\frac{S_M}{S_O} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{6-\sqrt{8}}{7}$$

aleshores:

$$a = 6, b = 7, c = 8$$

3745.- En la figura formada per dos quadrats, calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:

Siguen els quadrats $ABCD, EFGH$.

$$\overline{AR} = \overline{AB} - \overline{TB} - \overline{EF} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{DP} = \overline{AD} + \overline{TF} = 8$$

$$\overline{DQ} = \overline{AD} - \overline{TG} = 4$$

$$\overline{PF} = \overline{AR} + \overline{EF} = \frac{9}{2}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{JQD}, \overset{\Delta}{FPD}$ són semblants i de raó $1:2$

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{QJ} = \frac{1}{2}\overline{PT} = \frac{9}{4}$$

$$\overline{JG} = \overline{PF} - \overline{QJ} = \frac{9}{4}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{FTS}, \overset{\Delta}{APF}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{TS}}{\frac{9}{2}} = \frac{1}{8}$$

$$\overline{TS} = \frac{9}{16}$$

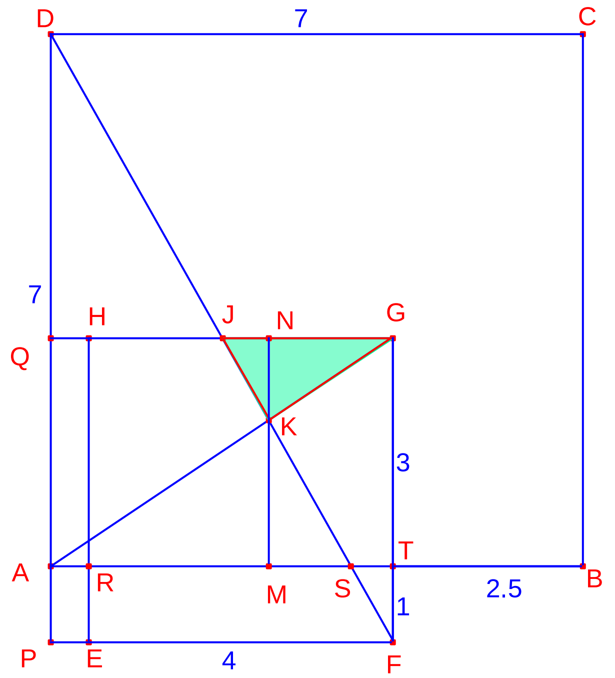
$$\overline{AS} = \overline{PF} - \overline{TS} = \frac{9}{2} - \frac{9}{16} = \frac{63}{16}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{GJK}, \overset{\Delta}{ASK}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{KN}}{\overline{NM}} = \frac{\overline{JG}}{\overline{JG} + \overline{AS}}$$

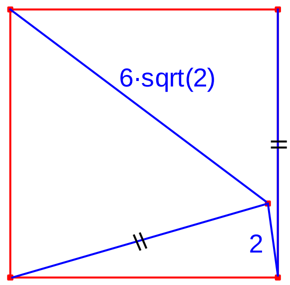
$$\frac{\overline{KN}}{3} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{4} + \frac{63}{16}} = \frac{12}{11}$$



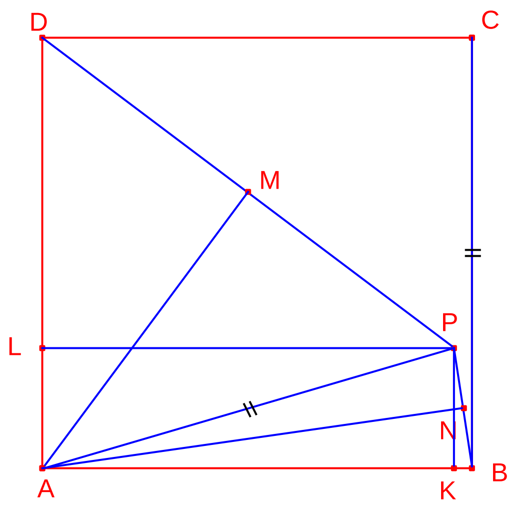
L'àrea del triangle ombrejat $\overset{\Delta}{GJK}$ és:

$$S_{GJK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{12}{11} = \frac{27}{22}$$

3746.- La figura està formada per un quadrat i tres segments.
Calculeu l'àrea del quadrat.



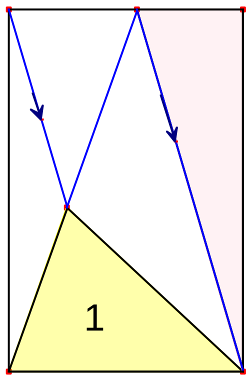
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga $\overline{AP} = c, \overline{BP} = 2, \overline{DP} = 6\sqrt{2}$
Siga M el punt mig del segment $\overline{DP}$.
Siga N el punt mig del segment $\overline{BP}$
Siga L la projecció de P sobre $\overline{AD}$
Siga K la projecció de P sobre $\overline{AB}$
Siga $\overline{DL} = x, \overline{LA} = \overline{PK} = c - x$



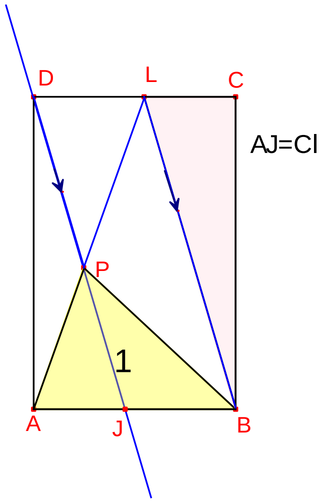
Els triangles rectangles $D\overset{\Delta}{L}P, P\overset{\Delta}{M}A$ són semblants.
aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{6\sqrt{2}}{c} = \frac{x}{3\sqrt{2}}$$
Simplificant:
$xc = 36$

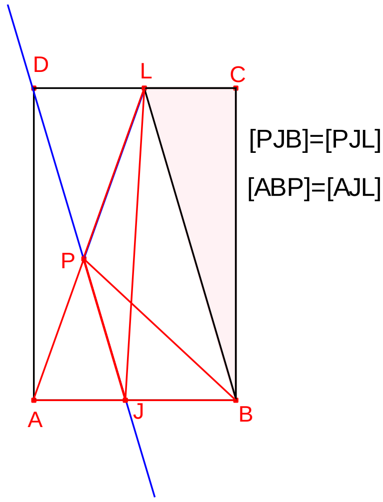
Els triangles rectangles $P\overset{\Delta}{K}B, A\overset{\Delta}{N}P$ són semblants.
aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{2}{c} = \frac{c - x}{\sqrt{c^2 - 1}}$$
Simplificant:
$2\sqrt{c^2 - 1} = c^2 - 36$
Resolent l'equació, l'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = c^2 = 50$

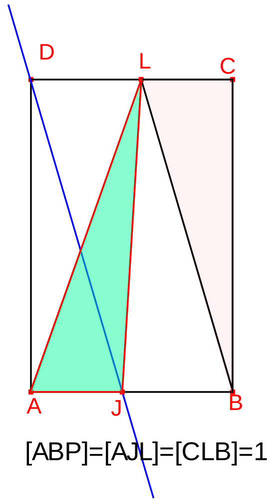
3747.- Dins d'un rectangle s'han dibuixat dos triangles. Si el triangle groc té àrea 1, calculeu l'àrea del triangle rosa.



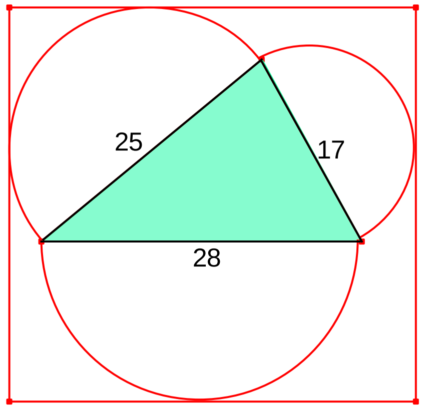
Solució:



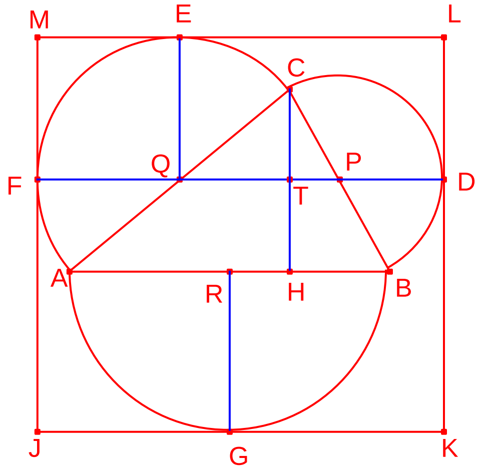




3748.- Sobre els costats d'un triangle s'han dibuixat tres semicircumferències.
Les semicircumferències són tangents als costats d'un rectangle.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle i l'àrea del rectangle.



Solució:



Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de costats $a = 17, b = 25, c = 28$
aplicant la fórmula d'Heró:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{70 \cdot 20 \cdot 14 \cdot 36}}{4} = 210$$

Siga $h_c = \overline{CH}$ l'altura sobre el costat $\overline{AB}$.

$$\frac{1}{2} \cdot 28 \cdot h_c = 210$$

$$h_c = 15$$

Siguen P, Q, R els punts migs del costats $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ del triangle.
Els radis de les circumferències són:

$$\overline{PD} = \overline{PB} = \frac{17}{2}, \overline{QC} = \overline{QF} = \overline{QE} = \frac{25}{2}, \overline{RG} = \overline{RA} = 14$$

$$\overline{QP} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 14$$

$$\overline{TH} = \frac{1}{2}h_c = \frac{15}{2}$$

Siga el rectangle exterior $JKLM$.

$$\overline{JK} = \overline{QF} + \overline{PQ} + \overline{PD} = \frac{25}{2} + 14 + \frac{17}{2} = 35$$

$$\overline{JM} = \overline{QE} + \overline{TH} + \overline{RG} = \frac{25}{2} + \frac{15}{2} + 14 = 34$$

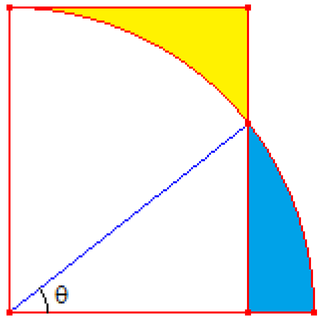
L'àrea del rectangle $JKLM$ és:

$$S_{JKLM} = 35 \cdot 34 = 1195$$

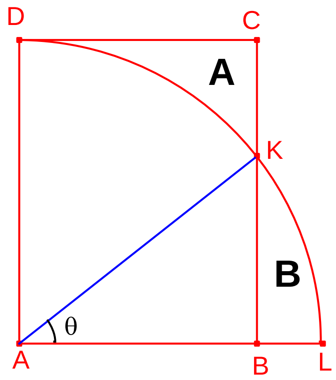
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{JKLM}} = \frac{210}{1195} = \frac{3}{17}$$

3749.- En el rectangle de la figura s'ha dibuixat un quadrant.
Si l'àrea groga és igual a l'àrea blava, calculeu la mesura de l'angle θ

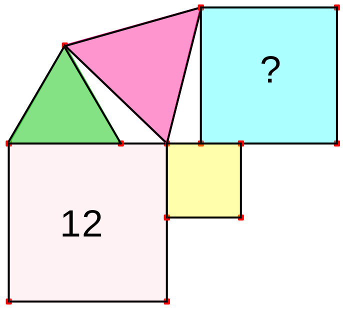


Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = a, \overline{AD} = b$
$\overline{BK} = a \cdot \tan\theta$

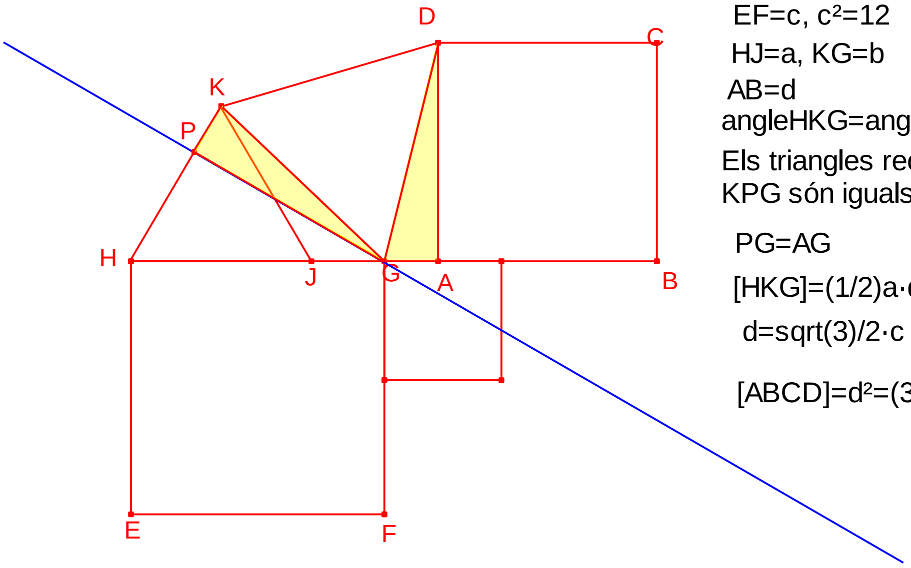


L'àrea blava és:
$$B = \frac{1}{2} \cdot \vartheta \cdot b^2 - \frac{1}{2} a^2 \cdot \tan\theta$$
L'àrea groga és:
$$B = ab - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) b^2 - \frac{1}{2} a^2 \cdot \tan\theta$$
les dues àrees són iguals, aleshores:
$$ab = \frac{\pi}{4} b^2$$
$$\cos\theta = \frac{a}{b} = \frac{\pi}{4}$$
$$\theta = \arccos\frac{\pi}{4}$$

3750.- La figura està formada per tres quadrats i dos triangles equilàters.
El quadrat gran té àrea 12.
Calculeu l’àrea del quadrat blau.



Solució:



$EF=c$, $c^2=12$
$HJ=a$, $KG=b$
$AB=d$
angleHKG=angleDGA
Els triangles rectangles GAD KPG són iguals

$PG=AG$
$[HKG]=(1/2)a\cdot d=(1/2)ac\cdot \sin 60^\circ$
$d=\mathrm{sqrt}(3)/2\cdot c$

$[ABCD]=d^2=(3/4)c^2=9$