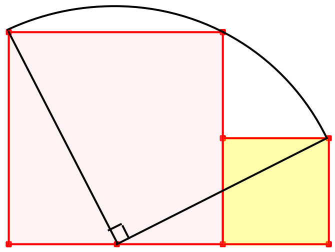
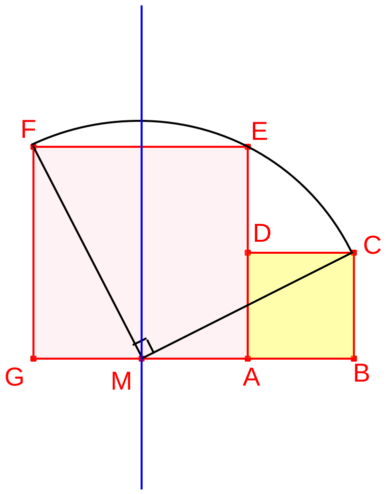
Problemes de Geometria per a l'ESO 376

3751.- La figura està formada per dos quadrats i un quadrant.
Si l'àrea del quadrat groc és 4, calculeu l'àrea del quadrant.



Solució:



AB=2, AE=c

M pertany a la mediatriu de FE

M punt mig de GA

Els triangles FGM, MBC són iguals

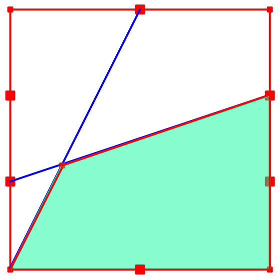
c/2+2=c

c=4

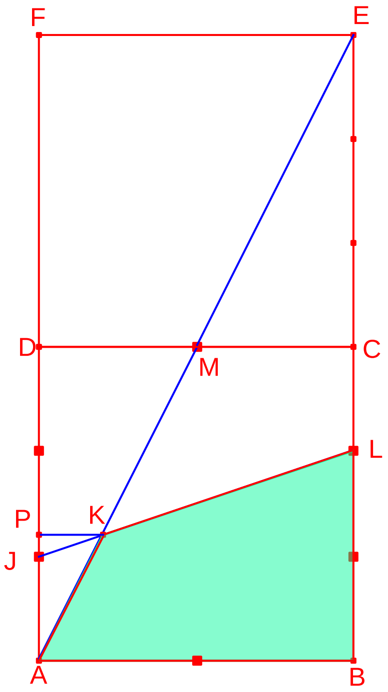
$r^2=MF^2=4^2+2^2=20$

$S=(Pi/4)r^2=5\cdot Pi$

3752.- En la figura els costats oposats s'han dividit en dues parts iguals (els horitzontals) i tres parts iguals (els verticals).
Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrilàter ombrejat i l'àrea del quadrats.



Solució:



AB=1

[ABCD]=1

[JLCD]=(1/2)(2/3+1/3)·1=1/2

AJ=1/3, EL=4/3

Els triangles AJK, ELK són semblants i de raó 1:4

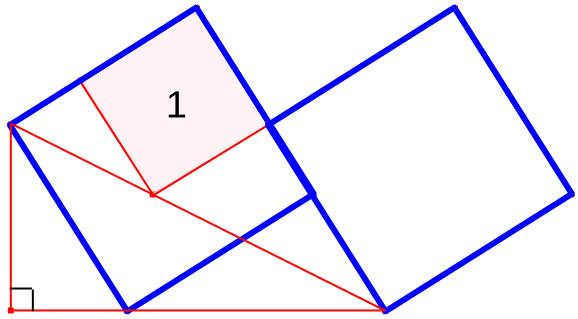
PK=(1/5)AB=1/5

[AJK]=(1/2)(1/3)(1/5)=1/30

[ABLK]=1-(1/2+1/30)=7/15

[ABLK]/[ABCD]=7/15

3753.- La figura està formada per un triangle rectangle i tres quadrats.
Els quadrats blaus són iguals i el ombrejat té àrea 1.
Calcula la mesura del costat de color blau.



Solució:
Siga el quadrat $CEFG$ de costat $\overline{CE} = 1$
Siga el quadrat $ABCD$ tal que $\overline{DE} = x$
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{DKL}$
$\overline{CD} = \overline{GL} = 1 + x$
$\overline{CL} = 2 + x$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DEF}, \overset{\Delta}{DCL}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

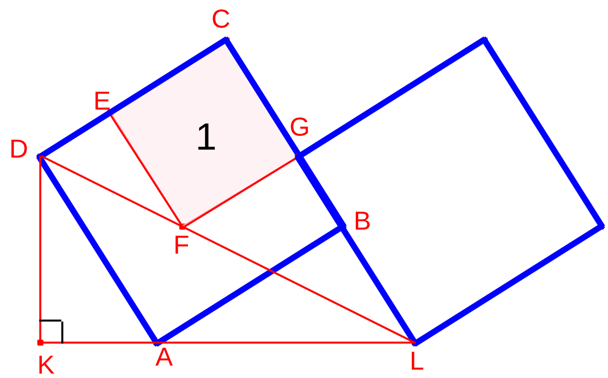
$$\frac{x}{1} = \frac{1+x}{2+x}$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

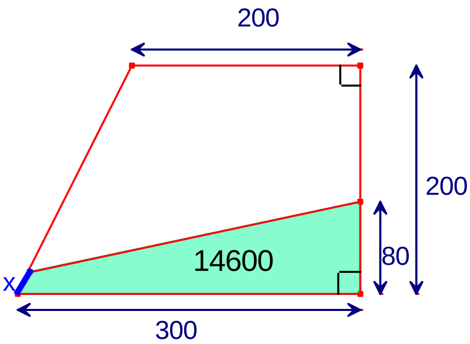
Resolent l’equació:

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi}$$

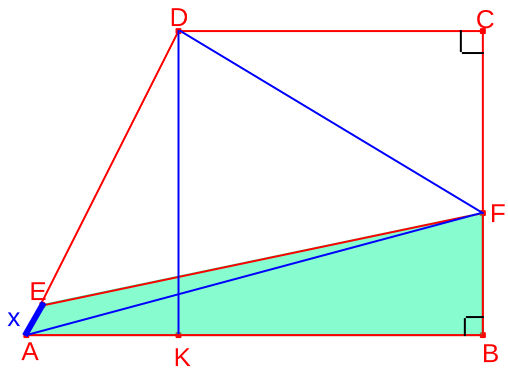
$$\overline{CD} = 1 + x = \Phi$$



2754.- Calculeu la mesura del segment x de la figura.



Solució:
Siga el trapezi rectangle $ABCD$, $\overline{AB} = 300, \overline{BC} = 200, \overline{CD} = 200$
Siga el quadrilàter $ABFE$, $\overline{BF} = 80, S_{ABFE} = 14600, \overline{AE} = x$



$S_{ABF} = \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot 80 = 12000$
$S_{AFE} = S_{ABFE} - S_{ABF} = 2600$
$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(300 + 200)200 = 50000$
$S_{CDF} = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 120 = 12000$
$S_{CDEF} = S_{ABCD} - S_{ABFE} = 35400$
$S_{DEF} = S_{CDEF} - S_{CDF} = 23400$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKD}$:
$\overline{AD} = 100\sqrt{5}$

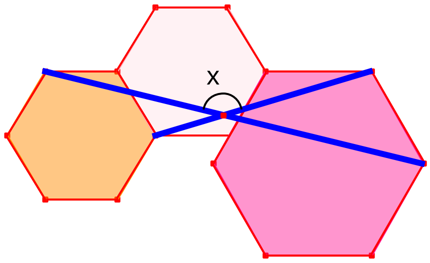
Les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{AFE}, \overset{\Delta}{DEF}$ són proporcionals a les bases:

$$\frac{x}{S_{AFE}} = \frac{100\sqrt{5} - x}{S_{DEF}}$$

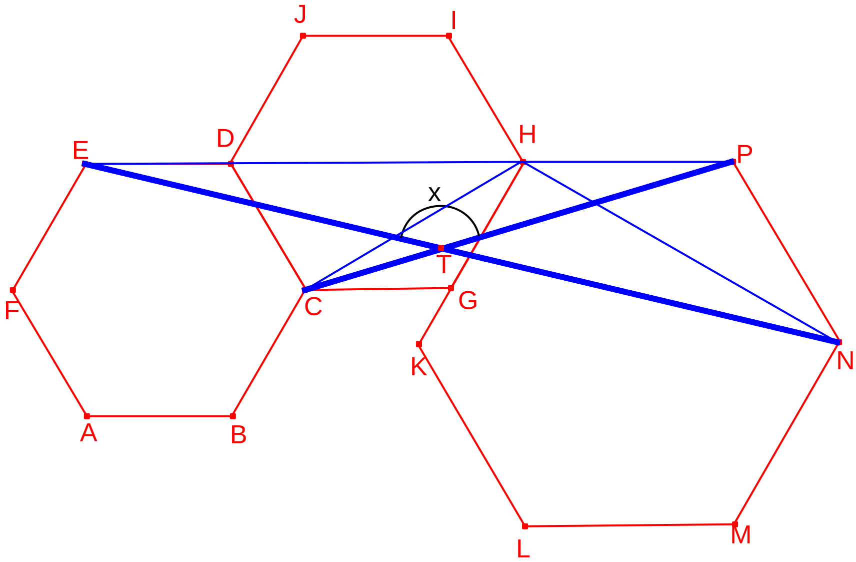
$$\frac{x}{2600} = \frac{100\sqrt{5} - x}{23400}$$

Resolent l'equació:
$x = 10\sqrt{5}$

3755.- La figura està formada per tres hexàgons regulars.
Calculeu la mesura de l'angle x

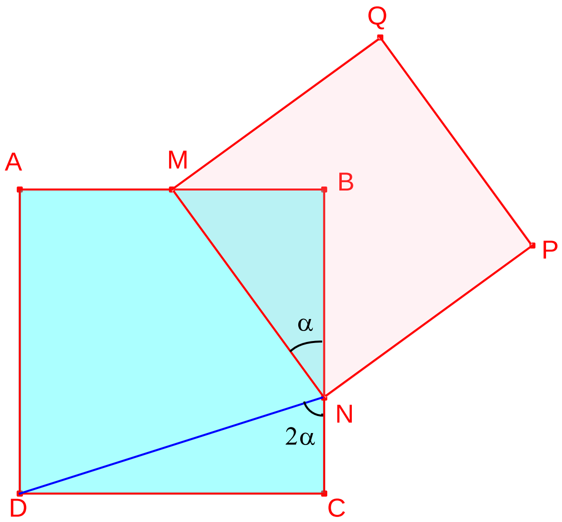


Solució:



Siguen els hexàgons regulars $ABCDEF, CGHIJD$ de costats $\overline{AB} = \overline{CG} = a$
Siga l'hexàgon regular de costat $HKLMNP$ de costat $\overline{HK} = b$
$\overline{EH} = 3a, \overline{HN} = b\sqrt{3}, \angle EHP = 150°$
$\overline{CH} = a\sqrt{3}, \overline{HP} = b, \angle CHP = 150°$
Els triangles $\overset{\Delta}{EHN}, \overset{\Delta}{CHP}$ són semblants.
$\angle EHC = 30°$
Aleshores, $x = \angle ETP = 150°$

3756.- Siguen els quadrats $ABCD, MNPQ$ tal que $\angle MNB = \alpha, \angle DNC = 2\alpha$
M el punt mig del costat $\overline{AB}$
Calculeu la proporció entre les seues àrees.



Solució:
Siga $\overline{AB} = 2, \overline{BM} = 1$
Siga $\overline{BN} = x$

$$\tan\alpha = \frac{1}{x}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2}{2-x} = \frac{2\cdot\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

Simplificant:
$2x^2 - 2x - 1 = 0$
Resolent l'equació:

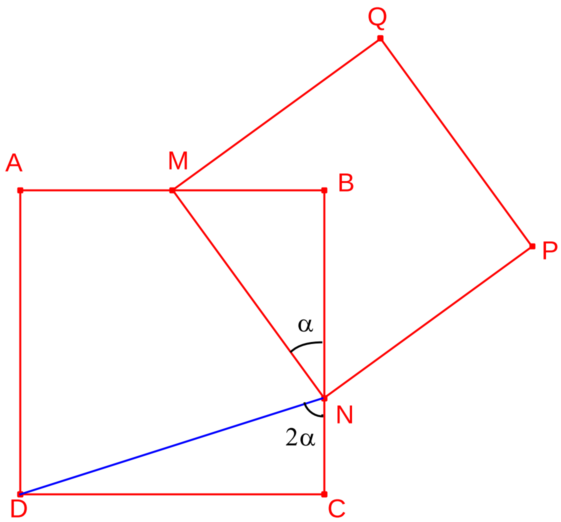
$$x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

L'àrea del quadrat $MNPQ$ és:

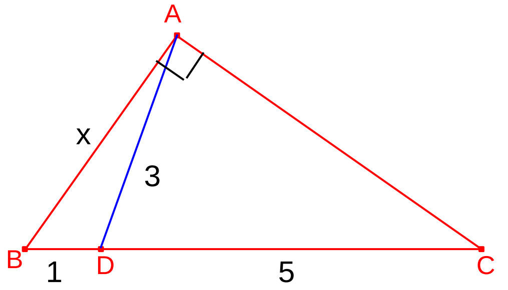
$$S_{MNPQ} = 1 + x^2 = \frac{4+\sqrt{3}}{2}$$

La proporció d'àrees és:

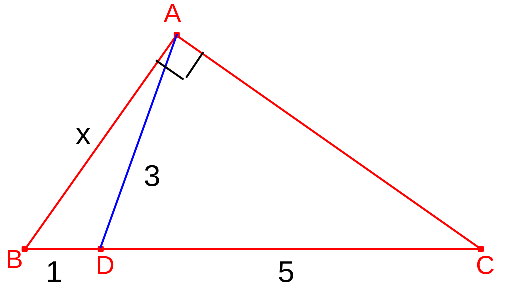
$$\frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{4+\sqrt{3}}{2}}{4} = \frac{4+\sqrt{3}}{8}$$



3757.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°, \overline{AB} = x$
Siga D un punt de la hipotenusa tal que $\overline{BD} = 1, \overline{CD} = 5$
Calculeu la mesura del catet x



Solució:



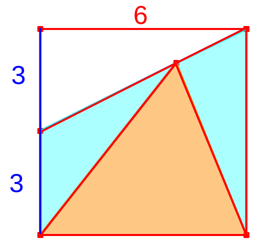
a=angleABC
cos a=x/6

teorema cosinus al triangle BDA

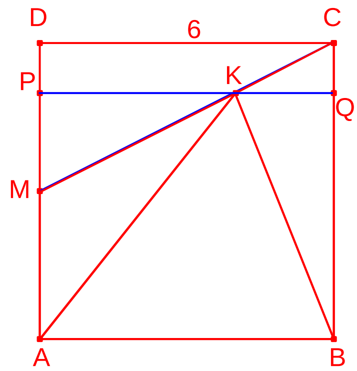
$9=1+x^2-2\cdot x\cdot x/6$

$x=2\cdot \mathrm{sqrt}(3)$

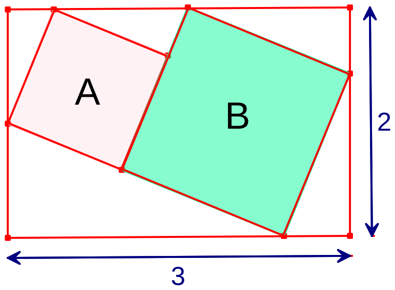
3758.- Dins d’un quadrat s’han dibuixat tres triangles.
Els triangles blaus tenen la mateixa àrea.
Calculeu l’àrea del triangle taronja.



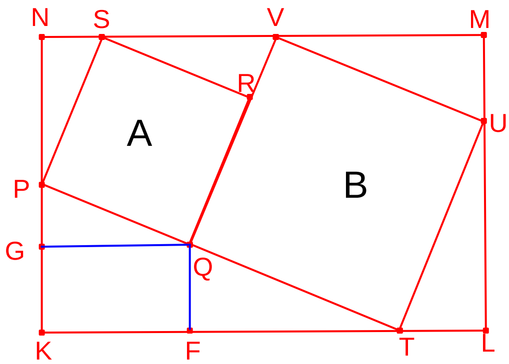
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 6$
Siga P la projecció de K sobre $\overline{AD}$
Siga Q la projecció de K sobre $\overline{BC}$
$\overline{BC} = 2 \cdot \overline{AM}$
Els triangles $\overset{\Delta}{AMK}, \overset{\Delta}{BCK}$ tenen la mateixa àrea.
aleshores, $\overline{PK} = 2 \cdot \overline{QK}$
Per tant, $\overline{PK} = 4, \overline{QK} = 2$
L’àrea del trapezi $ABCM$ és:
$$S_{ABCM} = \frac{3+6}{2} \cdot 6 = 27$$
L’àrea d’un triangle blau és:
$$S_{AMK} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$$
L’àrea del triangle taronja és:
$$S_{ABK} = S_{ABCM} - 2 \cdot S_{AMK} = 27 - 2 \cdot 6 = 15$$



3759.- En un rectangle s'han inscrit dos quadrats d'àrees A i B.
Calculeu la proporció $A : B$



Solució:
Siga el rectangle $KLMN$ de costats $\overline{KL} = 3, \overline{KN} = 2$
Siga el quadrat $PQRS$ de costat $\overline{PQ} = a$ d'àrea $A = a^2$
Siga el quadrat $QTUV$ de costat $\overline{QT} = b$ d'àrea $B = b^2$



Siga $\overline{TL} = \overline{MU} = \overline{QF} = c$
$\overline{LU} = \overline{FT} = 2 - c$
$\overline{FC} = 2$
$\overline{KF} = \overline{NP} = 1$

$\overline{RV} = b - a$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{TLU}, \overset{\Delta}{VRS}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{b-a}{c} = \frac{a}{2-c} = \frac{b}{2}$$

$$c = 2 - 2\frac{b}{a}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PGQ}, \overset{\Delta}{VRS}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{1}{a} = \frac{2-c}{b}$$

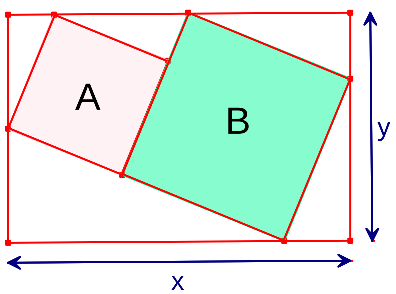
$$\frac{1}{a} = \frac{2\frac{b}{a}}{b}$$

$$2a^2 = b^2$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$

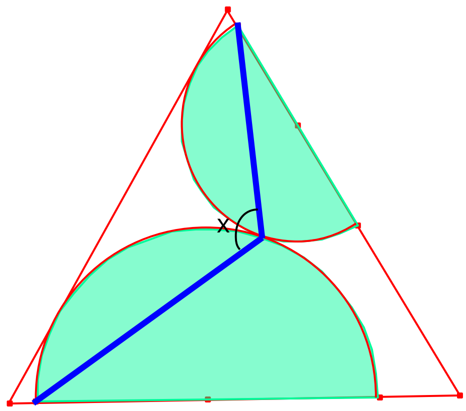
Generalització:
Calculeu la proporció $A : B$



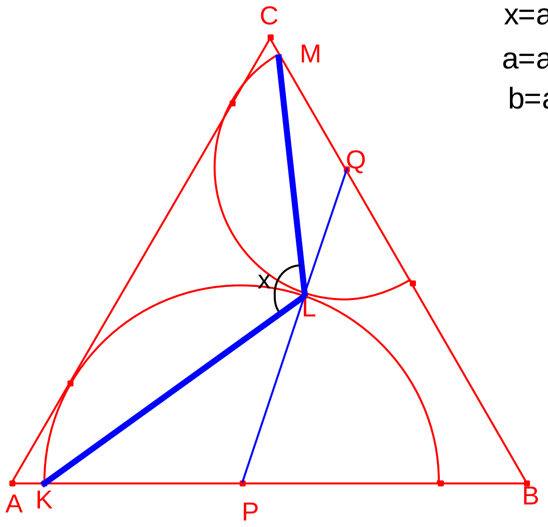
Solució:

$$\frac{A}{B} = \frac{x-y}{y}$$

3760.- La figura està formada per un triangle equilàter i dos semicercles tangents.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



x=angleKLM

a=anglePKL=anglePLK

b=angleQLM=angleQML

angleKPL=180º-2a

angleMQL=180º-2b

suma angles ACQP

120º+180º-2a+180º-2b=360º

a+b=60º

x=180º-(a+b)=120º