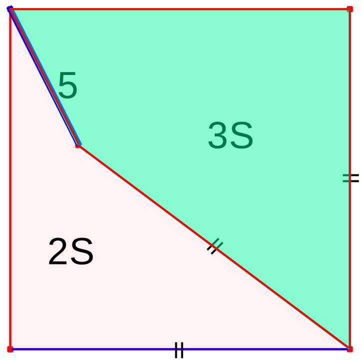
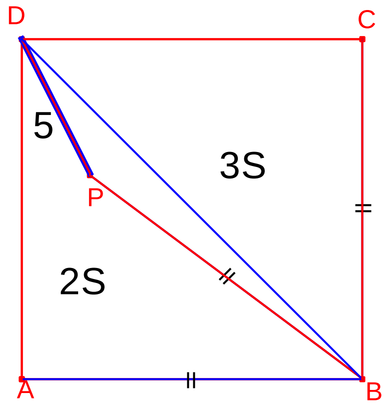
3761.- Calculeu l'àrea del quadrat de la figura.





Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$

$S_{ABCD} = c^2 = 5S$

$S_{PBD} = \frac{1}{2}S = \frac{1}{10}c^2$

$\overline{BP} = c, \overline{BD} = c\sqrt{2}$

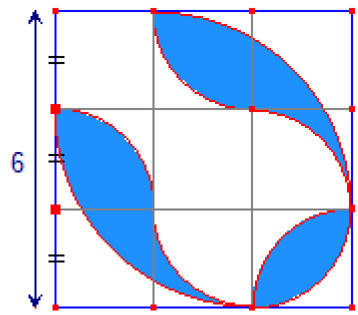
$$S_{PBD} = \frac{\sqrt{\left(5+\left(1+\sqrt{2}\right)c\right)\left(-5+\left(1+\sqrt{5}\right)c\right)\left(5+\left(\sqrt{2}-1\right)c\right)\left(5+\left(1-\sqrt{2}\right)c\right)}}{4} = \frac{1}{10}c^2$$

$150c^2 - c^4 - 625 = \frac{4}{25}c^4$

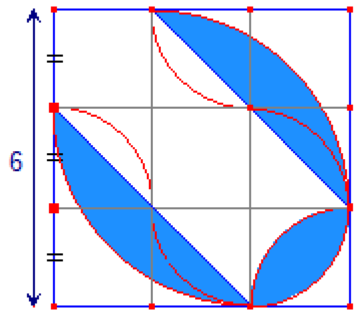
$s_{ABCD} = c^2 = 125$

$c = 5\sqrt{5}$

3762.- Calculeu l'àrea de la zona ombrejada interior al quadrat de costat 6.



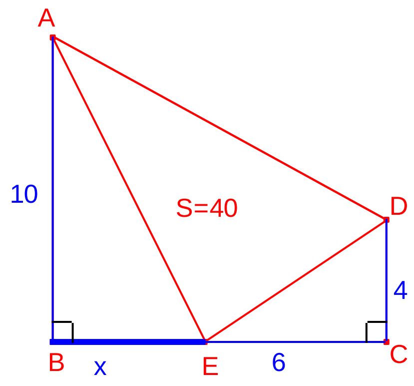
Solució:



La zona ombrejada està formada per dos segments circulars de 90º i radi 4, més dos segments circulars de 90º i radi 2.

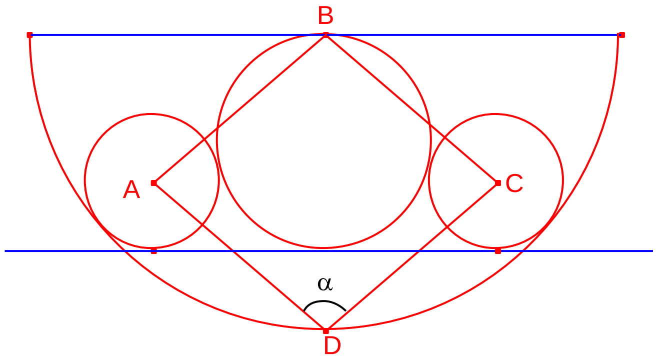
$$S=2\left(\frac{1}{4}\pi 4^2-\frac{1}{2}4^2\right)+2\left(\frac{1}{4}\pi 2^2-\frac{1}{2}2^2\right)=10\pi-20$$

3763.- En la figura, $ABCD$ és un trapezi rectangle
$\overline{AB} = 10, \overline{CD} = 4$
E és un punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{CE} = 6, S_{EDA} = 40$
Calculeu la mesura del segment $\overline{BE} = x$

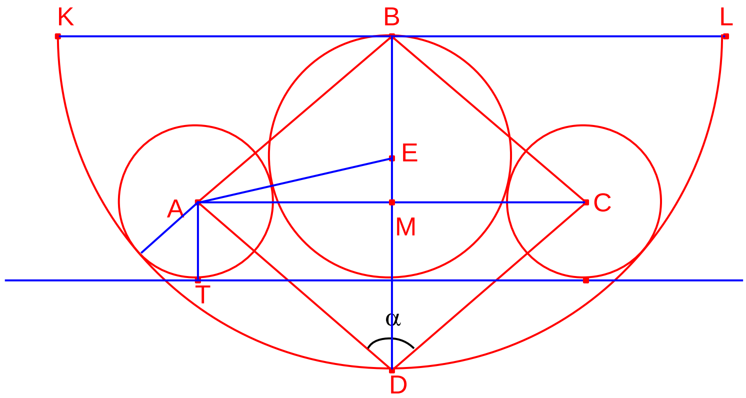


Solució:
$S_{ECD} = 12, S_{BEA} = 5x$
L'àrea del trapezi $ABCD$ és:
$$S_{ABCD} = \frac{10+4}{2}(x+6) = 40 + 12 + 5x$$
Simplificant:
$7x + 42 = 52 + 5x$
Resolent l'equació:
$x = 5$

3764.- La figura està formada per una semicircumferència i tres circumferències.
$ABCD$ és un rombe.
La recta tangent a les dues circumferències de centres A, C és paral·lela al diàmetre de la semicircumferència.
Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:

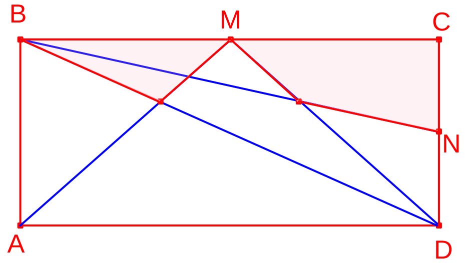


Siga la semicircumferència de centre B i radi $\overline{BD} = R$
Siga la circumferència de centre A i radi $\overline{AT} = r$
Siga la circumferència de centre E i radi $\overline{EB} = s$

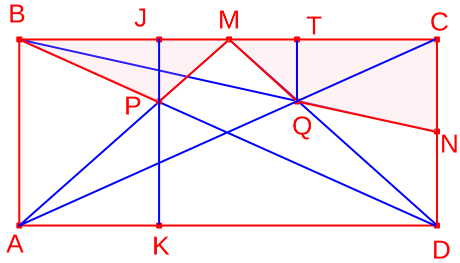
$$\overline{BM} = \frac{1}{2}R = 2s - r$$
$$R = 4s - 2r$$
$$\overline{BA} = R - r = 4s - 3r$$
$$\overline{EA} = r + s, \overline{EM} = s - r$$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{AMB}, \overset{\Delta}{AME}$:
$$(4s - 3s)^2 - (2s - r)^2 = (r + s)^2 - (s - r)^2$$
Simplificant:
$$2r^2 - 6rs + 3s^2 = 0$$
Resolent l'equació:
$$\frac{r}{s} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$
Siga $\angle ABM = \frac{1}{2}\alpha$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2s - r}{4s - 3r} = \frac{5 + 2\sqrt{3}}{13}$$
$$\cos\alpha = \frac{-95 - 40\sqrt{3}}{169}$$
$$\alpha = \arccos\frac{-95 - 40\sqrt{3}}{169} \approx 98°\,45'11"$$

3765.- Siga el rectangle $ABCD$ d'àrea 36.
Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{BC}, \overline{CD}$, respectivament.
Calculeu l'àrea ombrejada de la figura.



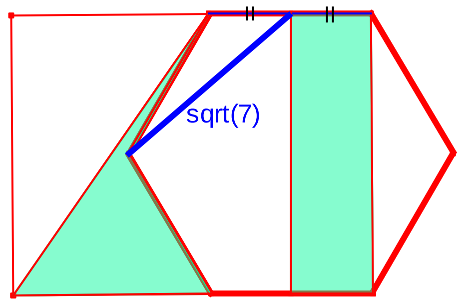
Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AD} = a, \overline{AB} = b$
$S_{ABCD} = ab = 36$



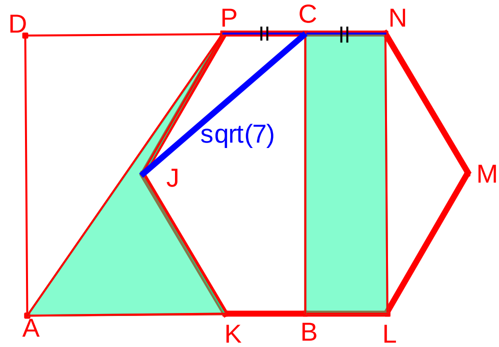
Els triangles $\overset{\Delta}{BPM}, \overset{\Delta}{DPA}$ són semblants i de raó $1 : 2$
Aleshores, aplicant el teorema de Tales:
$\overline{JP} = \frac{1}{3}b, \overline{KJ} = \frac{2}{3}b$
$S_{BPM} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{3}b = \frac{1}{12}S_{ABCD} = 3$

Els triangles $\overset{\Delta}{BTQ}, \overset{\Delta}{BCN}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{QT}}{\frac{1}{2}b} = \frac{\frac{1}{2}a + \overline{MT}}{a}$$
Els triangles $\overset{\Delta}{MTQ}, \overset{\Delta}{MCD}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{QT}}{b} = \frac{\overline{MT}}{\frac{1}{2}a}$$
Dividint ambdues expressions:
$$2 = \frac{\frac{1}{2}a + \overline{MT}}{2 \cdot \overline{MT}}$$
$$\overline{MT} = \frac{1}{6}a$$
$$\overline{QT} = \frac{1}{3}b$$
Aleshores, Q pertany a la intersecció de $\overline{AC}, \overline{DM}, \overline{BN}$.
$$S_{CQM} = \frac{1}{12}S_{ABCD} = 3$$
$$S_{CQN} = \frac{1}{12}S_{ABCD} = 3$$
L'àrea ombrejada és:
$$S_{ombrejada} = 3 \cdot S_{BPM} = 3 \cdot 3 = 9$$

3766.- La figura està formada per un hexàgon regular i un quadrat.
Calculeu l'àrea ombrejada.



Solució:
siga el quadrat $ABCD$.
Siga l'hexàgon regular $JKLMNP$ de costat $\overline{JK} = c$
Siga $\overline{JC} = \sqrt{7}$



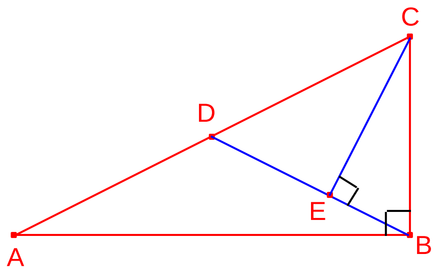
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{JCP}$

$7 = c^2 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}c^2$

Resolent l'equació:
$c = 2$
$\overline{BC} = \sqrt{3} \cdot c = 2\sqrt{3}$
$\overline{DP} = 2\sqrt{3} - 1$
L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = S_{ABCD} - S_{DPA} - S_{JKP} = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot 2\left(2\sqrt{3} - 1\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} 2^2 = 6$$

3767.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, B = 90°$.
Siga $\overline{BC} : \overline{AD} = 1 : 2$
Siga D el punt mig de la hipotenusa.
Siga el punt E que pertany al segment $\overline{BD}$ tal que $\overline{BD}$ és perpendicular a $\overline{CE}$
Calculeu la proporció $\overline{BE} : \overline{ED}$.



Solució:
Siga $\overline{BC} = x, \overline{AB} = 2x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC} = x\sqrt{5}$

$$\overline{BD} = \overline{AD} = \frac{\sqrt{5}}{2}x$$

Siga $\overline{BE} = y, \overline{ED} = \frac{\sqrt{5}}{2}x - y$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangle rectangles $\overset{\Delta}{BEC}, \overset{\Delta}{DEC}$:

$$x^2 - y^2 = \frac{5}{4}x^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}x - y\right)^2$$

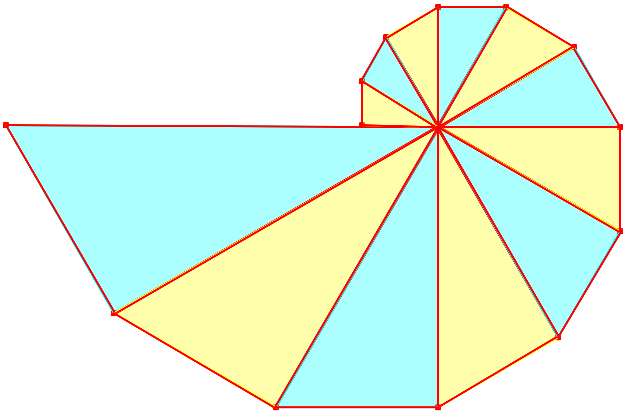
Simplificant:
$x^2 = xy\sqrt{5}$

$$y = \frac{\sqrt{5}}{5}x$$

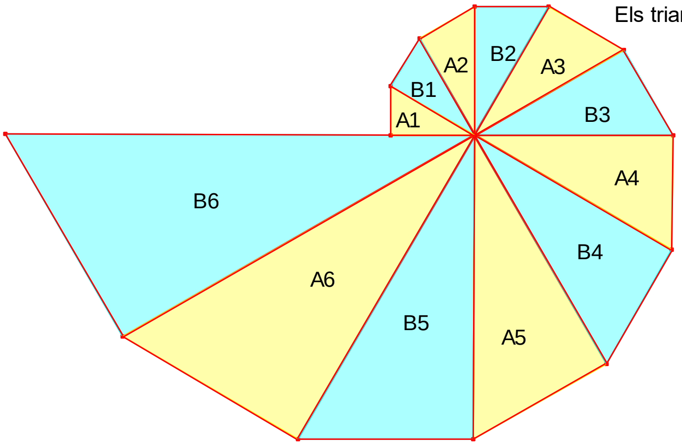
la proporció que cerquem és:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{ED}} = \frac{y}{\frac{\sqrt{5}}{2}x - y} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{3\sqrt{5}}{10}} = \frac{2}{3}$$

3768.- En la figura tots els triangles rectangles són semblants.
Calculeu la proporció entre l'àrea groga i la total.



Solució:



Els triangles rectangles són semblants 30º, 60º, 90º

$B1=(4/3)\cdot A1$

$A2=(4/3)B1=(16/9)\cdot A1$ $B2=(4/3)(16/9)\cdot A1$

$A3=(16/9)^2\cdot A1$ $B3=(4/3)(16/9)^2\cdot A1$

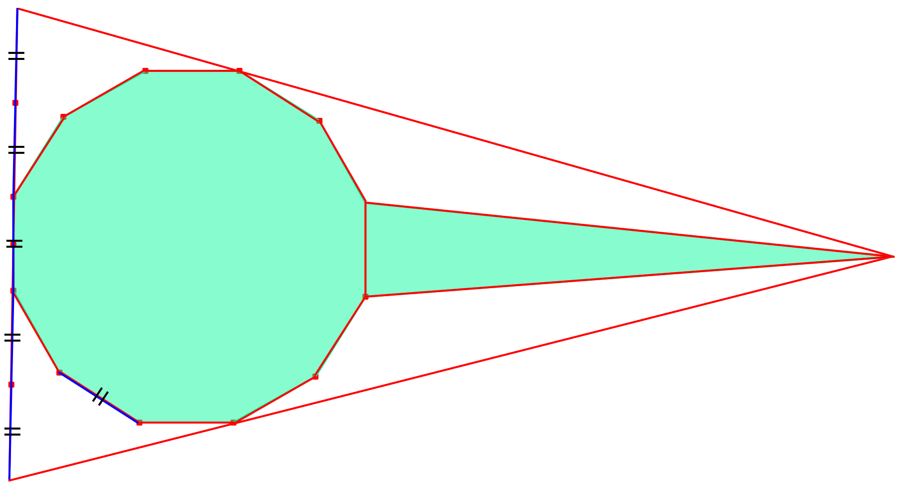
$A4=(16/9)^3\cdot A1$ $B4=(4/3)(16/9)^3\cdot A1$

$A5=(16/9)^4\cdot A1$ $B5=(4/3)(16/9)^4\cdot A1$

$A6=(16/9)^5\cdot A1$ $B6=(4/3)(16/9)^5\cdot A1$

[Groga]/[Total]=1/(1+4/3)=3/7

3769.- La figura està formada per un dodecàgon regular i dos triangles.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del triangle exterior.

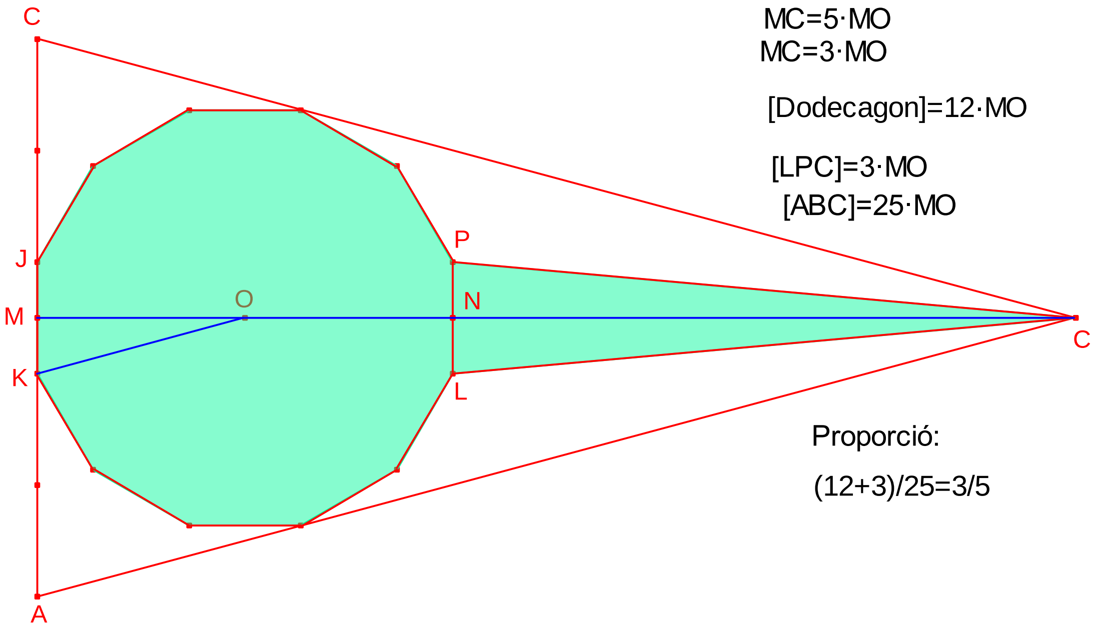


Solució:

MJ=2, MK=5
angleMAC=AngleMKO=75º
MC=5·MO
MC=3·MO

[Dodecagon]=12·MO

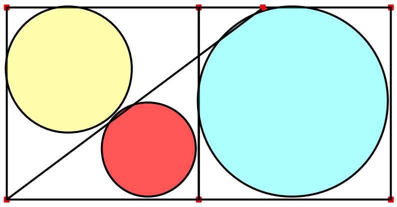
[LPC]=3·MO
[ABC]=25·MO



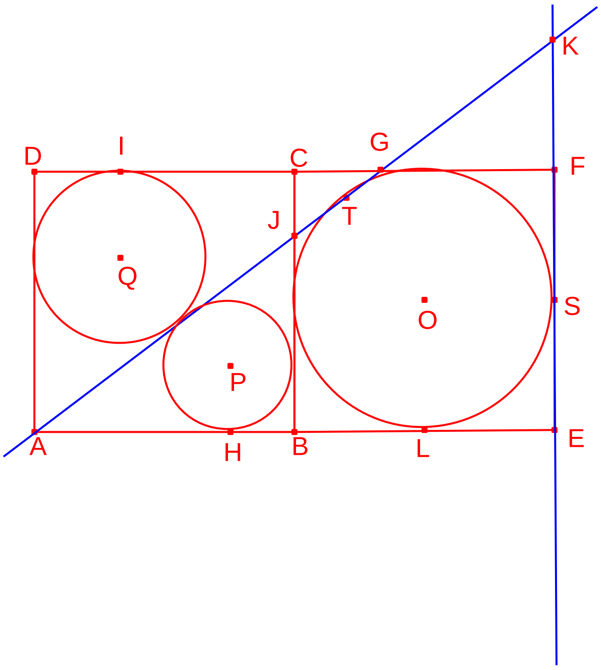
Proporció:

(12+3)/25=3/5

3770.- La figura està formada per dos quadrats i tres cercles.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total.



Solució:



AB=2a
KS=KT=x
OS=a
PH=r, QI=s
AEK, ABJ, semblants de raó 2:1
r=(1/2)a

AT=AL=3a
teorema Pitàgores AEK
$(3a+x)^2=(a+x)^2+16a^2$
x=2a
AEK, DGA, semblants i de raó 3:2
s=(2/3)a

Proporció:
$(a^2+r^2+s^2)Pi/(8a^2)=(61/288)Pi$