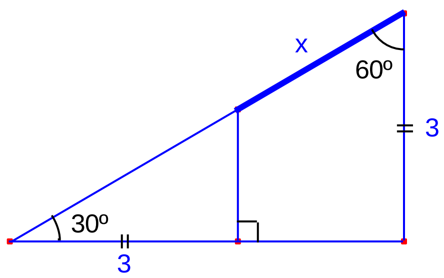
3771.- En la següent figura, calculeu la mesura del segment x



Solució:

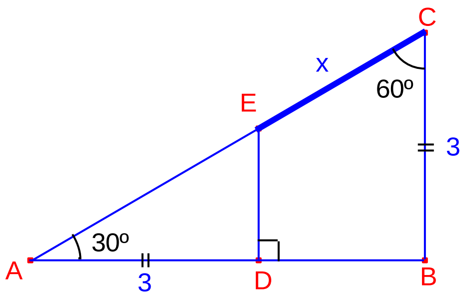
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, B = 90°$
Siga $\overline{BC} = \overline{AD} = 3$
$\overline{AC} = 6, \overline{AB} = 3\sqrt{3}$
$\overline{AE} = 6 - x, \overline{BD} = 3\sqrt{3} - 3$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{ADE}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{6-x}{3} = \frac{x}{3\sqrt{3}-3} = \frac{6}{3\sqrt{3}}$$

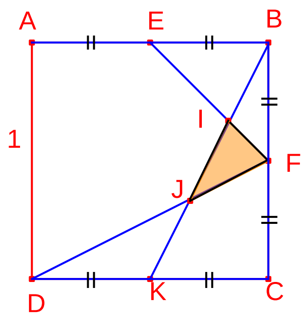
Resolent l'equació:

$$x = 6 - 2\sqrt{3}$$

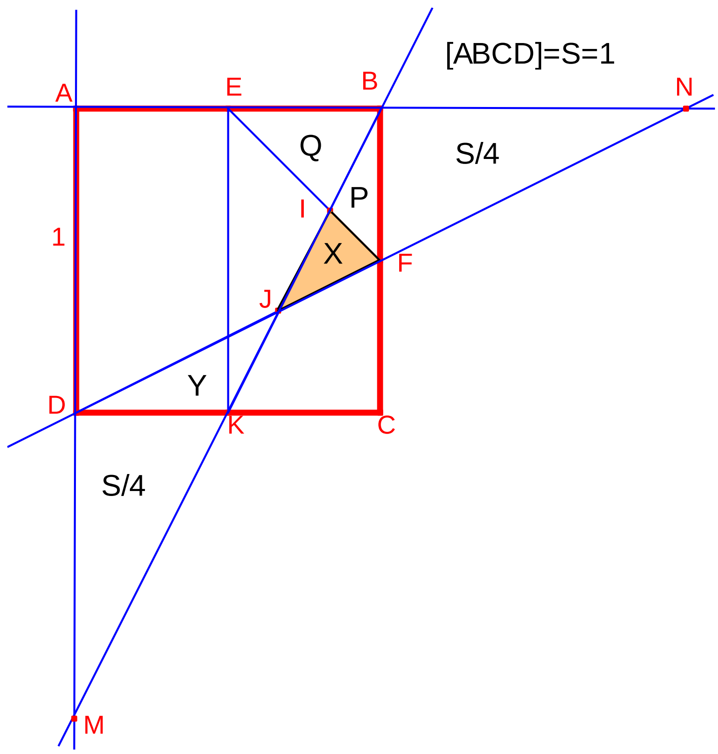


3772.- Donat el quadrat de costat 1 i els punts migs de tres costats.

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{IJF}$



Solució:
Siga $S = 1$, àrea del quadrat $ABCD$.
Siga $S_{IJF} = X$
Siga $S_{DKJ} = Y$
Siguen $S_{IFB} = P, S_{EBI} = Q$



Els triangles $\overset{\Delta}{IFB}, \overset{\Delta}{IEK}$ són semblants i de raó 1:2
Aleshores, aplicant el teorema de Tales:
$S_{IEK} = 4P$

$$\begin{cases} P + Q = \frac{1}{8}S \\ 4P + Q = \frac{1}{4}S \end{cases}$$

Resolent el sistema:

$$\begin{cases} P = \frac{1}{24}S \\ Q = \frac{1}{12}S \end{cases}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{JFB}, \overset{\Delta}{JDM}$ són semblants i de raó 1:2
Aleshores, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{1}{4}S + Y = 4\left(X + \frac{1}{24}S\right)$$

Simplificant:

$$4X - Y = \frac{1}{12}S$$

Els triangles $\overset{\Delta}{DKJ}, \overset{\Delta}{NBJ}$ són semblants i de raó 1:2
Aleshores, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{1}{4}S + \frac{1}{24}S + X = 4Y$$

Simplificant:

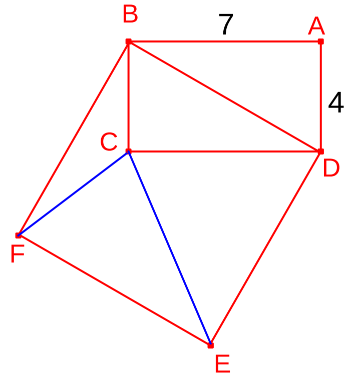
$$-X + 4Y = \frac{7}{24}S$$

$$\begin{cases} 4X - Y = \frac{1}{12}S \\ -X + 4Y = \frac{1}{24}S \end{cases}$$

Resolent el sistema: $\begin{cases} X = \frac{1}{24}S \\ Y = \frac{1}{12}S \end{cases}$

Aleshores, $S_{IJF} = \frac{1}{24}$

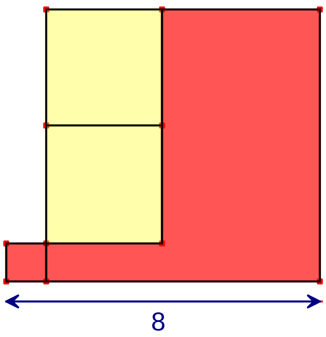
3773.- Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB}=7, \overline{AD}=4$
Siga el quadrat $BDEF$ tal que C és interior al quadrat.
Calculeu $\overline{CE}^2+\overline{CF}^2$



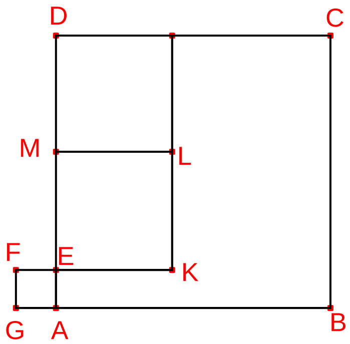
Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCD}$:
$\overline{BD}=\sqrt{65}$
Siga $\alpha=\angle CBD$
$\angle FBC=90°-\alpha, \angle CDE=\alpha$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{FBC}$:
$$\overline{CF}^2=16+65-2\cdot 4\cdot\sqrt{65}\cdot\frac{7}{\sqrt{65}}=25$$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CDE}$:
$$\overline{CE}^2=49+65-2\cdot 7\cdot\sqrt{65}\cdot\frac{4}{\sqrt{65}}=58$$
$$\overline{CE}^2+\overline{CF}^2=58+25=83$$

3774.- La figura està formada per quatre quadrats. Calculeu l'àrea de la ona roja.

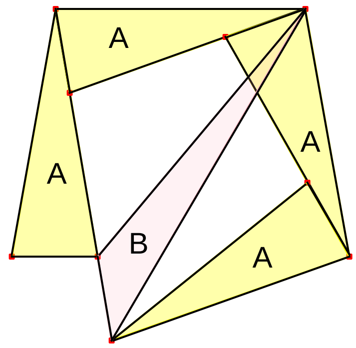


Solució:



Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{A\,B} = c$
Siga el quadrat $AEFG$ de costat $\overline{AE} = 8 - c$
Siga el quadrat $EKLM$ de costat $\overline{EK} = \frac{c-(8-c)}{2} = c - 4$
L'àrea roja és:
$S_{roja} = S_{AEFG} + S_{ABCD} - 2 \cdot S_{EKLM} = (8-c)^2 + c^2 - 2(c-4)^2 = 32$

3775.- La figura està formada per quatre triangles isòsceles iguals d'àrea A i un triangle d'àrea B.
Calculeu $B : A$



Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{CDE}, \overline{CD} = x, \overline{CE} = \overline{DE} = y, \angle CED = \alpha$

$\angle CDE = \angle ECD = 90° - \frac{\alpha}{2}$

$\angle EGI = \angle GIK = 90° + \frac{\alpha}{2}$

$\angle DFH = \angle FHJ = \angle HJK = 90° + \frac{\alpha}{2}$

$\overline{FH} = \overline{HJ} = y - x$

Aleshores, FHJK és un cometa:

$\overline{FK} = \overline{KJ} = y$

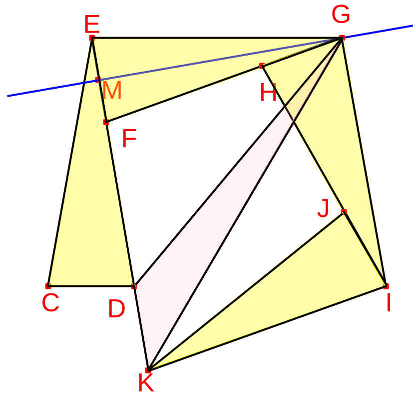
aleshores,

$\overline{DK} = x$

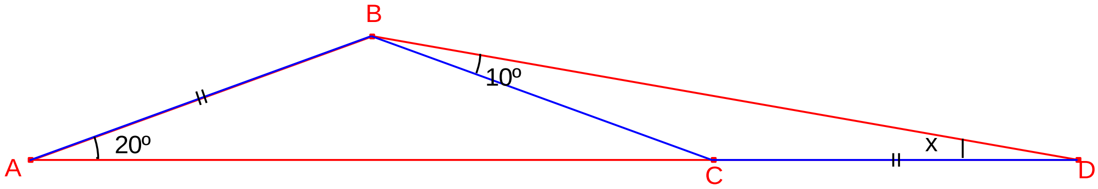
Per tant:

$S_{EFG} = S_{DKG}$

Aleshores, $B : A = 1 : 1$



3776.- En la figura $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\angle BAC = 20°, \angle CBD = 10°, \angle CDB = x$
Calculeu la mesura de l'angle x

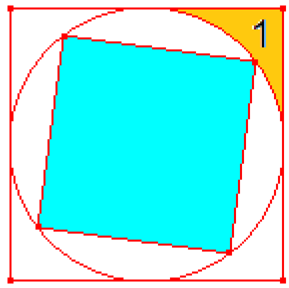


Solució:
Siga $\overline{AB} = \overline{CD} = a, \overline{BC} = b$
$\angle ACB = 10° + x$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$:
$$\frac{b}{\sin x} = \frac{a}{\sin 10°}$$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$$\frac{b}{\sin 20} = \frac{a}{\sin(10° + x)}$$

Dividint ambdues expressions:
$$\frac{\sin 20°}{\sin x} = \frac{\sin(10° + x)}{\sin 10°}$$
$\sin 20° \cdot \sin 10° = \sin x \cdot \sin(10° + x)$
$\cos 10° - \cos 30° = \cos 10° - \cos(10° + 2x)$
$\cos 30° = \cos(10° + 2x)$
$30° = 10° + 2x$
$x = 10°$

3777.- La figura està formada per dos quadrats i una circumferència.
Si l'àrea de la zona taronja és 1, calculeu l'àrea del quadrat interior.



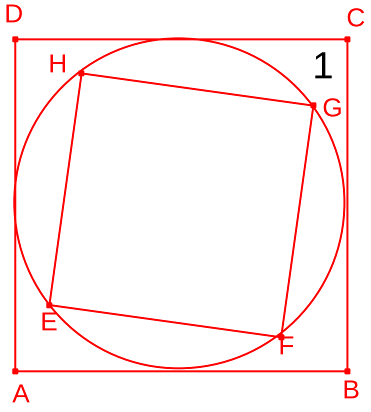
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2R$
Siga el quadrat $EFGH$ de diagonal $\overline{EG} = 2R$
L'àrea de la zona ombrejada és 1:

$$S_{ombrejada} = 1 = R^2 - \frac{1}{4}\pi R^2$$

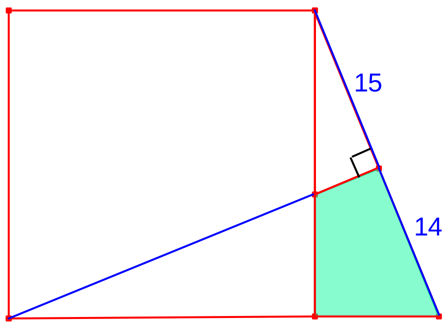
$$R^2 = \frac{4}{4-\pi}$$

L'àrea del quadrat $EFGH$ és:

$$S_{EFGH} = 2 \cdot R^2 = \frac{8}{4-\pi} \approx 9.3196$$



3778.- La figura està formada per un quadrat i un triangle rectangle sobre un costat del quadrat. Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:

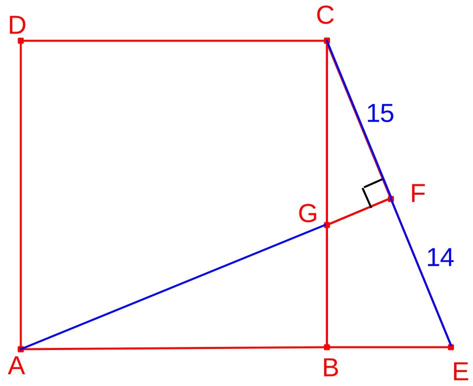
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABG}, \overset{\Delta}{CBE}$ són iguals.

$\overline{AG} = \overline{CE} = 29$

Siga $\overline{BG} = \overline{BE} = x$

Siga $\overline{FG} = a$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AFE}, \overset{\Delta}{CFG}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{14}{29+a} = \frac{a}{15}$$

$$a^2 + 29a - 210 = 0$$

Resolent l'equació:

$$a = 6$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CFG}$:

$$c - x = \sqrt{15^2 + 6^2} = 3\sqrt{29}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABG}, \overset{\Delta}{CFG}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{c} = \frac{6}{15}$$

Considerem el sistema:

$$\begin{cases} c - x = 3\sqrt{29} \\ x = \dfrac{2}{5}c \end{cases}$$

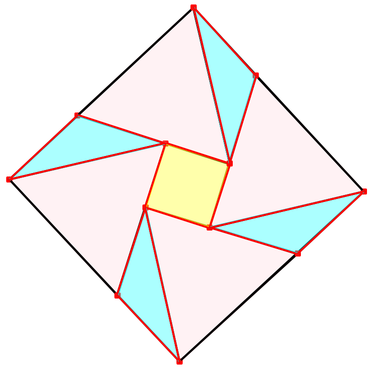
Resolent el sistema:

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{29} \\ c = 5\sqrt{29} \end{cases}$$

L'àrea ombrejada és:

$$S_{BEFG} = S_{GBE} + S_{GFE} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}14a = 58 + 42 = 100$$

3779.- La figura està formada per dos quadrats i quatre triangles equilàters.
Calculeu la proporció entre l'àrea dels dos quadrats.



Solució:
Siguen els quadrats $ABCD, EFGH$.

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DJH}$ de costat $\overline{DJ} = c$
$\angle KDH = \angle KHD = 30°$
Siga M el punt mig del segment $\overline{DH}$

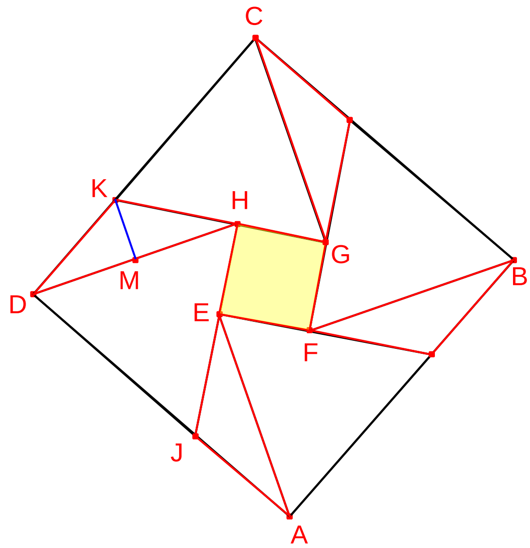
$$\overline{DK} = \overline{KH} = \frac{\sqrt{3}}{3}c$$

$$\overline{HG} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}c$$

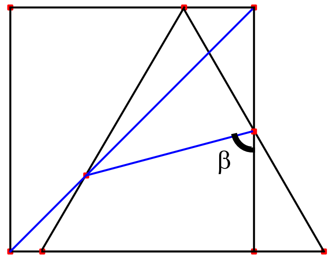
$$\overline{DC} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}c$$

la proporció entre les àrees dels quadrats és:

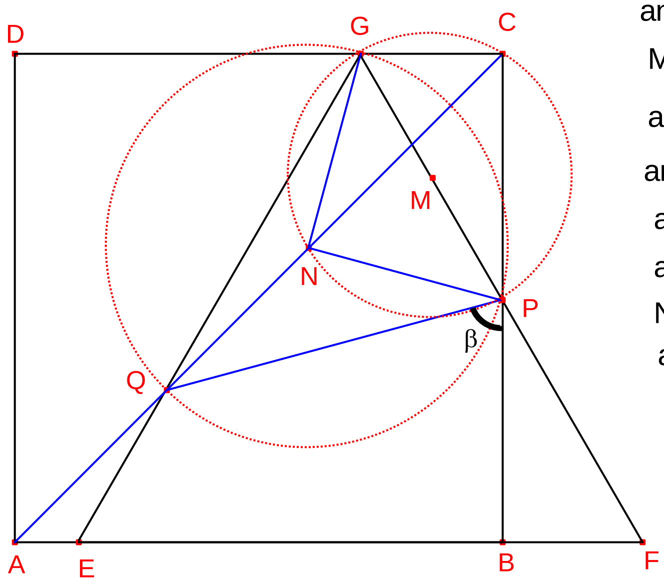
$$\frac{S_{EFGH}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\right)^2 = 7-4\sqrt{3}$$



3780.- La figura està formada per un quadrat i un triangle equilàter.
Calculeu la mesura de l'angle β



Solució:



angleGQC=15º

M punt mig PG

angleGNP=90º

angleNPG=angleNCG=45º

angleNGP=45º

angleQGN=15º

NQ=NG=NP

angleGQP=45º

angleEQP=210º- β

angleEQP=135º

β =75º