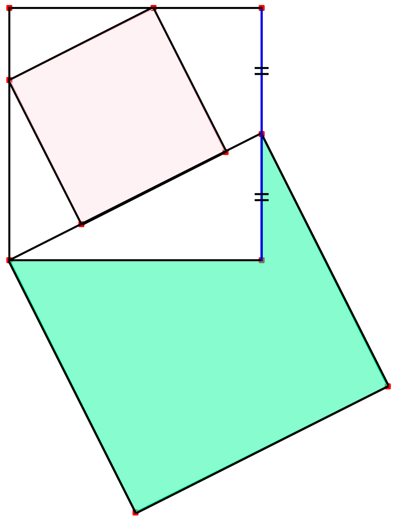
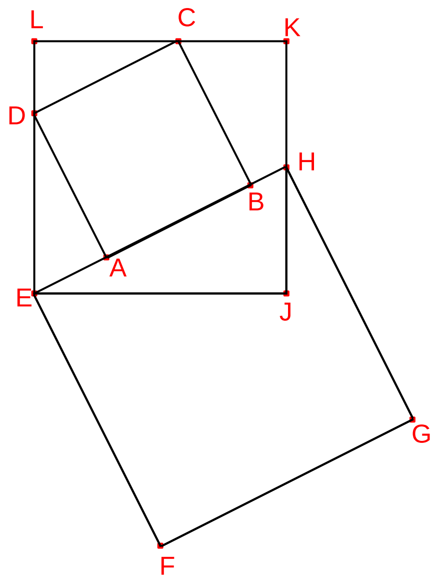
3781.- La figura està formada per tres quadrats.
Calculeu la proporció entre les àrees ombrejades.

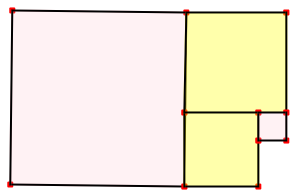


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2$
Siguen els quadrats $EFGH, EJKL$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EJH}, \overset{\Delta}{DAE}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{EA} = 1$
$\overline{DE} = \sqrt{5}$

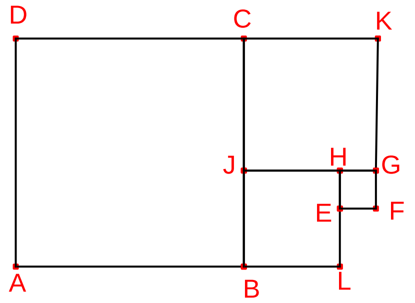


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CLD}, \overset{\Delta}{DAE}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{DL}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\overline{DL} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$
$$\overline{EL} = \sqrt{5} + \frac{2}{5}\sqrt{5} = \frac{7}{5}\sqrt{5}$$
$$\overline{EH} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \overline{EL} = \frac{7}{2}$$
La proporció entre les àrees ombrejades és:
$$\frac{S_{ABCD}}{S_{EFGHJ}} = \frac{4}{\frac{49}{7} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}\sqrt{5}\right)^2} = \frac{20}{49}$$

3782.- La figura està formada per quatre quadrats.
L'àrea de la zona rosa és 20.
Calculeu l'àrea de la zona groga.

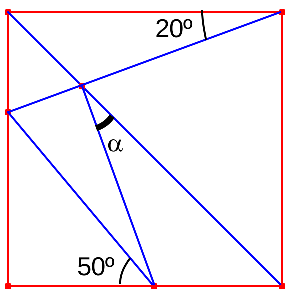


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga el quadrat $EFGH$ de costat $\overline{EF} = b$
La suma de les àrees dels dos quadrats és 20.
$a^2 + b^2 = 20$

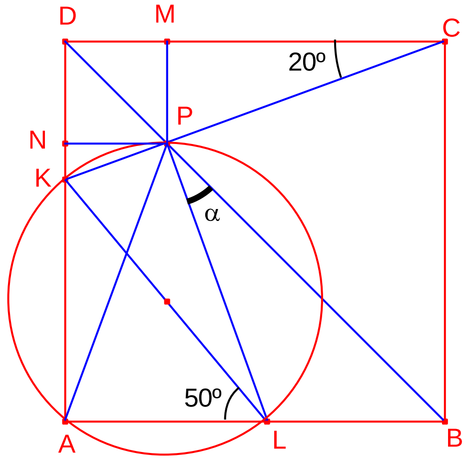


Siga el quadrat $JGKC$ de costat $\overline{JG} = c$
Siga el quadrat $BLHJ$
$\overline{BL} = c - b = a - c$
$2c = a + b$
L'àrea groga és:
$S_{groga} = S_{JCKC} + S_{BLHJ} = c^2 + (a-c)^2 = 2c^2 + a^2 - 2ac = 2c^2 + a^2 - a(a+b)$
$S_{groga} = 2c^2 - ab = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + 2ab) - ab = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$

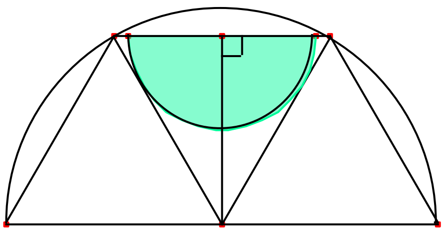
3783.- Donat el quadrat calculeu la mesura de l'angle α



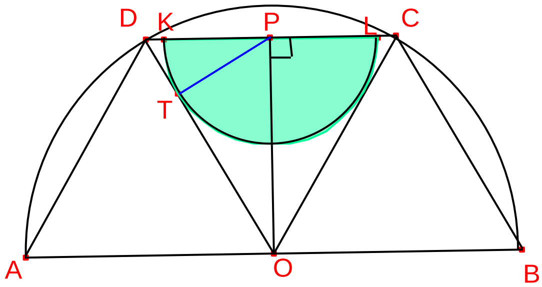
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.
Siga $\angle DCK = 20°, \angle ALK = 50°$
$\angle DKC = 70°, \angle AKL = 40°$
$\angle PKL = 70°$
$\overline{AP} = \overline{CP}$
$\overline{PM} = \overline{PN}$
$\angle KAP = 20°$
$ALPK$ és inscriptible.
Aleshores, $LBCP$ és inscriptible.
Aleshores, $\angle LPC = 90°$
$\angle CPB = 20° + 45° = 65°$
$\alpha = 90° - 65° = 25°$



3784.- La figura està formada per dos semicercles i dos triangles equilàters iguals. Calculeu la proporció entre les àrees dels dos semicercles.

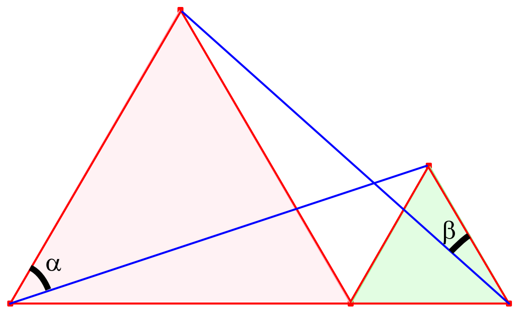


Solució:
Siga el cercle de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$
Siga el cercle de centre P i diàmetre $\overline{KL} = 2r$
$\overline{PT} = r$
$\overline{CD} = R$

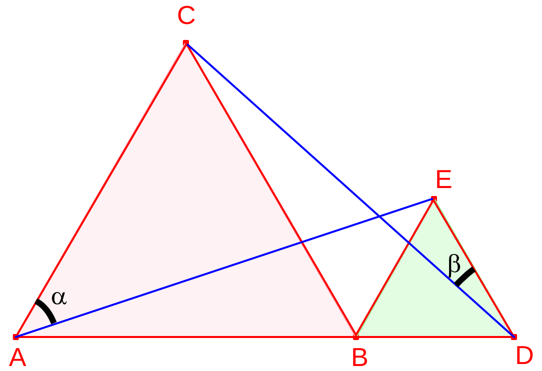


El triangle $\overset{\Delta}{PTD}$ és tal que $T = 90°, P = 30°$,
$\acute{PD} = \frac{1}{2}R$, $\overline{DT} = \frac{1}{4}R$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PTD}$:
$$\frac{1}{4}R^2 = r^2 + \frac{1}{16}R^2$$
Simplificant:
$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{3}{16}$$
La proporció entre les àrees dels semicercles és:
$$\frac{S_P}{S_O} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{3}{16}$$

3785.- La figura està formada per dos triangles equilàters.
Calculeu $\alpha + \beta$



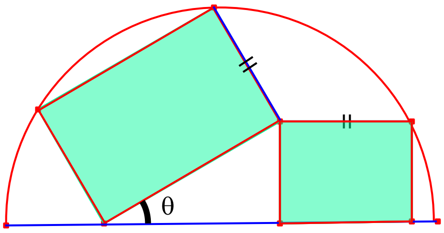
Solució:



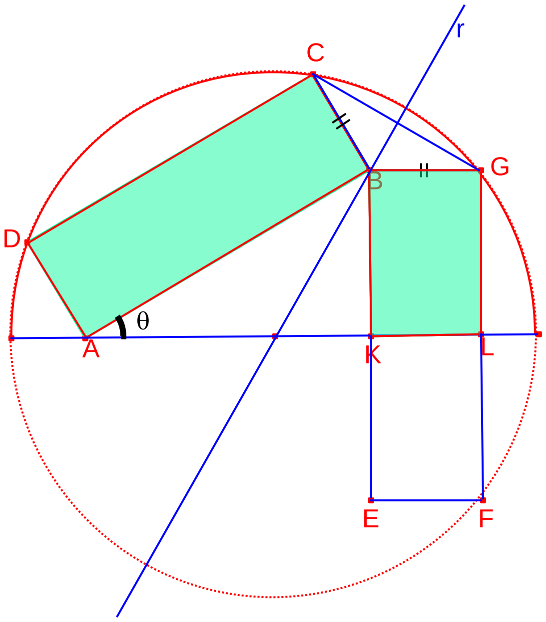
ABE=CBD
angleBCD=angleCDE
$60^{\circ} - \alpha = \beta$

$\alpha + \beta = 60^{\circ}$

3786.- La figura està formada per una semicircumferència i dos rectangles que tenen un costat igual.
Calculeu la mesura de l'angle θ



Solució:

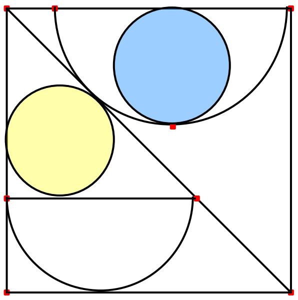


ABCD, EFGB simètrics respecte de r

BE=2·KE

$\theta = 30^{\circ}$

3787.- La figura està formada per un quadrat, dues semicircumferències i dos cercles.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos cercles,



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{KL}$

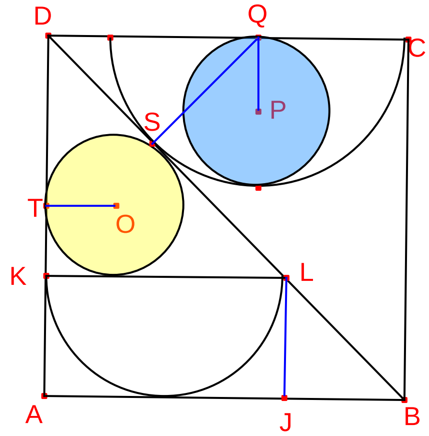
$$\overline{JL} = \overline{BJ} = \frac{1}{2}\overline{KL}$$

Aleshores:

$$\overline{KL} = \overline{KD} = \frac{2}{3}c, \overline{DL} = \frac{2}{3}c\sqrt{2}$$

Siga $a = \overline{OT}$ radi del cercle inscrit al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DKL}$:

$$a = \frac{2 \cdot \overline{KL} - \overline{DL}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}c$$



Siga $b = \overline{PQ}$ radi del cercle blau.
Siga el semicercle de centre Q i radi $\overline{QC} = \overline{QS} = 2b$
aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{DSQ}$:

$$\overline{DQ} = 2b\sqrt{2}$$

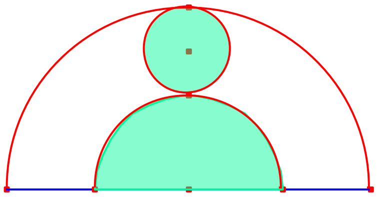
Aleshores:

$$b = \frac{1}{2+2\sqrt{2}}c = \frac{\sqrt{2}-1}{2}c$$

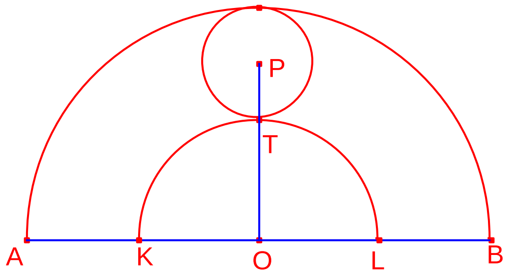
La proporció entre les àrees dels dos cercles és:

$$\frac{S_O}{S_p} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2} = \frac{8}{9}$$

3788.- En l'interior d'una semicircumferència s'ha inscrit una semicircumferència i una circumferència. Calculeu la fracció mínima entre l'àrea ombrejada i l'àrea del semicercle exterior.



Solució:



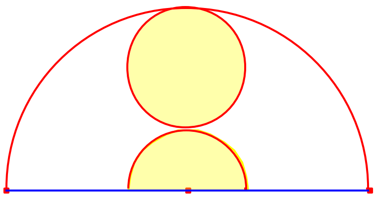
Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$
Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{KL} = 2r$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \frac{1}{2}(R - r)$
La proporció d'àrees és:

$$f\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{\frac{1}{2}r^2 + \left(\frac{R-r}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}R^2}$$

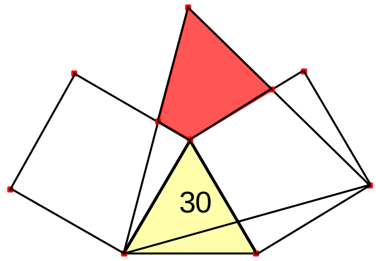
$$f\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{3}{2}\left(\left(\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}\right) \geq \frac{1}{3}$$

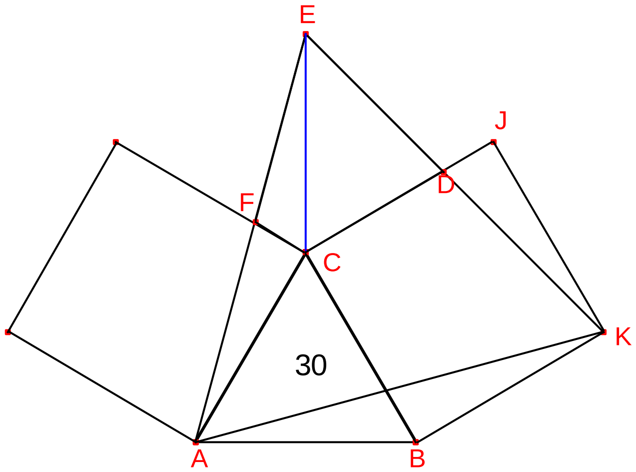
La proporció d'àrea mínima s'assoleix quan $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$, la proporció mínima és $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$
El radi del semicercle i del cercle ombrejats és igual



3789.- La figura està formada per dos triangles equilàters, el menut d'àrea 30, i dos quadrats sobre els costats del triangle equilàter.
Calculeu l'àrea del quadrilàter ombrejat.



Solució:



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$ i àrea 30.

$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = 30$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABK}, \overset{\Delta}{ACE}$ són iguals.

$\overline{CE} = c, \angle FCE = 60°$

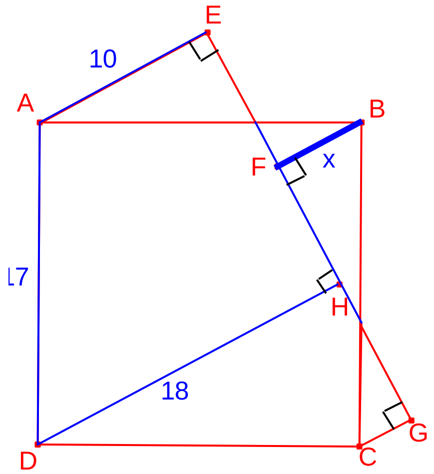
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ACF}, \overset{\Delta}{KJD}$ són iguals.

$\overline{JD} = \overline{CF}$

L'àrea del quadrilàter $CDEF$ és:

$S_{CDEF} = S_{FCE} + S_{CDE} = \frac{1}{2}\overline{FC} \cdot c \cdot \sin 60° + \frac{1}{2}c \cdot \overline{CD} \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = 30$

3790.- En la figura, ABCD és un quadrat.
Calculeu la mesura del segment $x = \overline{BF}$



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 17$
Siga L la projecció de A sobre el segment $\overline{DH}$
$\overline{DL} = 8$
aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DLA}$:
$\overline{AL} = 15$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DLA}, \overset{\Delta}{JEA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{AJ}}{17} = \frac{10}{15}$$
$$\overline{AJ} = \frac{34}{3}$$
$$\overline{BJ} = 17 - \frac{34}{3} = \frac{17}{3}$$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DLA}, \overset{\Delta}{BFJ}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{x}{15} = \frac{\frac{17}{3}}{17}$$
Resolent l'equació:
$x = 5$