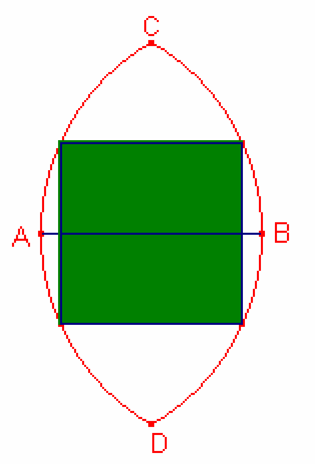
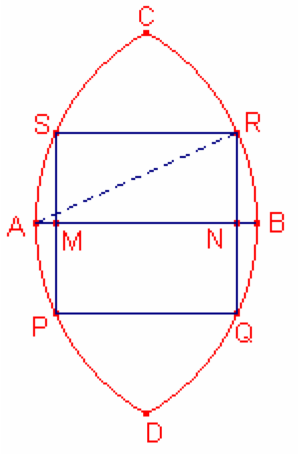
Problemes de Geometria per a l'ESO 38



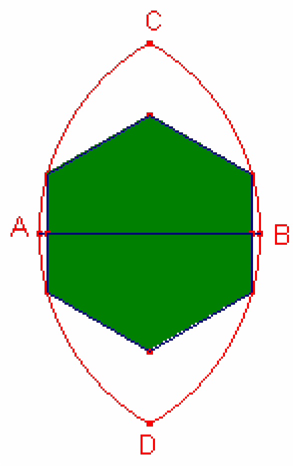
371.- En la figura els arcs $\overset{\frown}{CAD}$, $\overset{\frown}{CBD}$ tenen centre B, A, respectivament.
Si $\overline{AB} = r$ calculeu el costat del quadrat inscrit en els arcs.



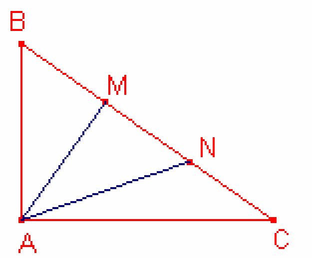
Solució:
Siga el quadrat PQRS de costat $c = \overline{PQ}$.
El segment $\overline{AB}$ talla el quadrat en els punts M, N.
Siga $x = \overline{AM} = \overline{BN}$.
$\overline{AB} = 2\overline{AM} + \overline{PQ}$.
$r = 2x + c$ (1)
$\overline{AR} = r$, $\overline{RN} = \dfrac{c}{2}$.
$\overline{AN} = x + c$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANR}$
$r^2 = (x+c)^2 + \left(\dfrac{c}{2}\right)^2$ (2)
Considerem els sistema format per les expressions (1) (2):
$\begin{cases} 2x + c = r \\ (x+c)^2 + \dfrac{c^2}{4} = r^2 \end{cases}$. Resolent el sistema en les incògnites x, c:
$\begin{cases} x = \dfrac{r}{4}\left(3 - \sqrt{7}\right) \\ c = \dfrac{r}{2}\left(\sqrt{7} - 1\right) \end{cases}$

Altre problema:

En la figura els arcs $\overset{\frown}{CAD}$, $\overset{\frown}{CBD}$ tenen centre B, A, respectivament.
Si $\overline{AB} = r$ calculeu el costat de l'hexàgon regular inscrit en els arcs (veure figura).



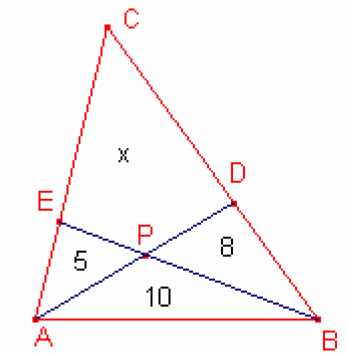
Solució:
El costat de l'hexàgon és $c = \dfrac{r}{4}\left(\sqrt{15} - \sqrt{3}\right)$.



372.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90º$.
Siguen M, N punt del segment $\overline{BC}$ tal que $\overline{BM} = \overline{MN} = \overline{CN}$.
Si $x = \overline{AM}$ i $y = \overline{AN}$ determineu $\overline{MN}$.

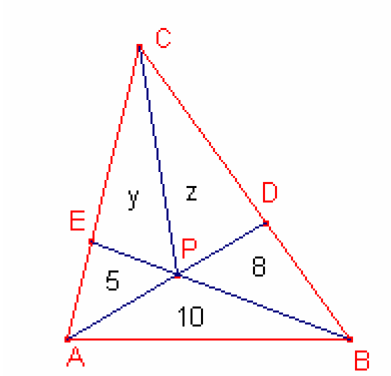
Solució:
Siga $z = \overline{MN}$, aleshores, $\overline{BC} = 3z$.
Siga $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
$\cos C = \frac{b}{3z}$, $\cos B = \frac{c}{3z}$.
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ANC}$:
$y^2 = z^2 + b^2 - 2bz\frac{b}{3z}$. Simplificant:
$$y^2 = z^2 + \frac{1}{3}b^2 \qquad (1)$$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AMB}$:
$x^2 = z^2 + c^2 - 2cz\frac{c}{3z}$. Simplificant:
$$x^2 = z^2 + \frac{1}{3}c^2 \qquad (2)$$
Sumant les expressions (1) (2):
$$x^2 + y^2 = 2z^2 + \frac{1}{3}\left(b^2 + c^2\right) \qquad (3)$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$$b^2 + c^2 = (3z)^2 \qquad (4)$$
Substituint l'expressió (4) en l'expressió (3):
$x^2 + y^2 = 2z^2 + \frac{1}{3}\left(9z^2\right)$.
$x^2 + y^2 = 5z^2$. Resolent l'equació en z:
$z = \overline{MN} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{5}}$.

373.- En la figura les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{APE}$, $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{BPD}$ són, respectivament, 5, 10 i 8. Determineu l'àrea del quadrilàter DCEP.



Solució:
Siga x l'àrea del quadrilàter DCEP.

Siga y l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EPC}$, i z l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CPD}$.
Dos triangles que tenen la mateixa altura de les àrees són proporcionals a les bases.



Els triangles $\overset{\Delta}{APB}$, $\overset{\Delta}{DPB}$, tenen la mateixa altura:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{DP}}=\frac{10}{8}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{APB}$, $\overset{\Delta}{APE}$, tenen la mateixa altura:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{EP}}=\frac{10}{5}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{APC}$, $\overset{\Delta}{DPC}$, tenen la mateixa altura:

$$\frac{y+5}{z}=\frac{\overline{AP}}{\overline{DP}}=\frac{10}{8} \qquad (1)$$

$8y-10z=-40$.

Els triangles $\overset{\Delta}{BPC}$, $\overset{\Delta}{EPC}$, tenen la mateixa altura:

$$\frac{z+8}{y}=\frac{\overline{BP}}{\overline{EP}}=\frac{10}{5}.$$

$$-10y+5z=-40 \qquad (2)$$

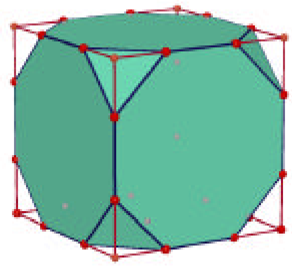
Resolent el sistema format per les expressions (1) (2):

$$\begin{cases}4y-5z=-20\\-2y+z=-8\end{cases},\quad \begin{cases}y=10\\z=12\end{cases}.$$

$x=y+z$.

Aleshores l'àrea del quadrilàter DCEP és $x=22$.

374.- El cub truncat és un poliedre semiregular (cares polígons regulars i mateix índex dels vèrtexs) que resulta de tallar un cub pels 8 vèrtexs formant 8 triangles equilàters i 6 octògons regulars.
Si l'aresta del cub és a calculeu el volum del cub truncat.

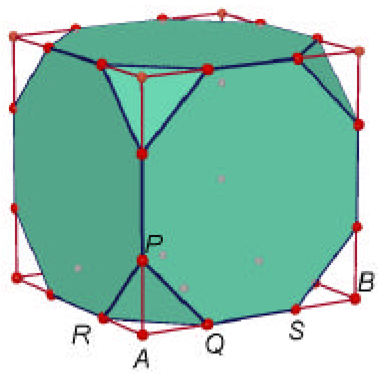


Solució:

Siga $\overline{AB} = a$ aresta del cub.

Siguen $\overline{PQ} = \overline{PR} = \overline{QR} = \overline{QS} = c$ arestes del cub truncat.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{PAQ}$:



$\overline{AP} = \overline{AQ} = \overline{SB} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.

$\overline{AB} = 2\overline{AQ} + \overline{QS} = \left(1+\sqrt{2}\right)c$.

Aleshores:

$a = \left(1+\sqrt{2}\right)c$.

$c = \frac{1}{1+\sqrt{2}}a = \left(\sqrt{2}-1\right)a$.

$\overline{AP} = \overline{AQ} = \overline{SB} = \frac{\sqrt{2}}{2}c = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)a = \frac{2-\sqrt{2}}{2}a$

El volum del cub truncat és igual al volum del cub menys vuit vegades el volum del tetraedre APQR:

$V_{cubTruncat} = V_{cub} - 8V_{APQR}$.

$V_{cub} = a^3$.

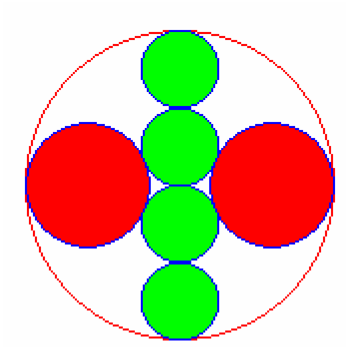
$V_{APQR} = \frac{1}{3}S_{AQR} \cdot \overline{AP} = \frac{1}{6}\overline{AP}^3 = \frac{1}{6}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}a\right)^3 = \frac{1}{24}\left(10-7\sqrt{2}\right)a^3$.

$V_{cubTruncat} = V_{cub} - 8V_{APQR} = a^3 - 8\frac{1}{24}\left(10-7\sqrt{2}\right)a^3 = \frac{7}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)a^3$.

El volum en funció de l'aresta del cub truncat és:

$V_{cubTruncat} = \frac{7}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)a^3 = \frac{7}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^3 c^3 = \frac{7}{3}\left(3+2\sqrt{2}\right)c^3$.

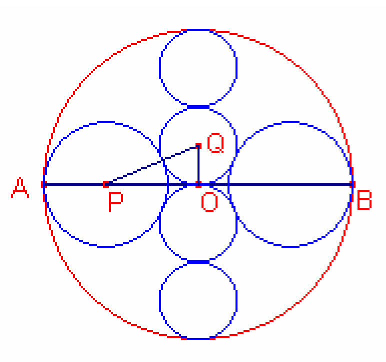
375.- En la figura les quatre circumferències menudes tenen el mateix radi, són tangents i els centres estan sobre el diàmetre de la circumferència gran.
Les circumferències mitjanes són tangents a la circumferència gran i a les dues circumferències menudes centrals.
Si el radi de la circumferència gran és R calculeu el radi de les circumferències mitjanes.
Sangaku



Solució:

Siga O el centre de la circumferència gran, de diàmetre $\overline{AB} = 2R$.
Siga Q en centre d'una de les circumferències menudes centrals.

$\overline{OQ} = \frac{R}{4}$.



Siga P el centre d'una de les dues circumferències menudes.
Siga $s = \overline{AP}$ el seu radi.

$\overline{PQ} = s + \frac{R}{4}$. $\overline{OP} = R - s$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{POQ}$:

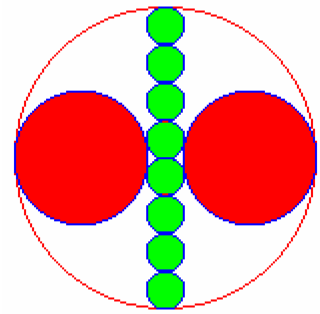
$\left(s + \frac{R}{4}\right)^2 = \left(\frac{R}{4}\right)^2 + (R-s)^2$. Simplificant:

$\frac{1}{2}Rs = R^2 + 2Rs$. Resolent l'equació en la incògnita s:

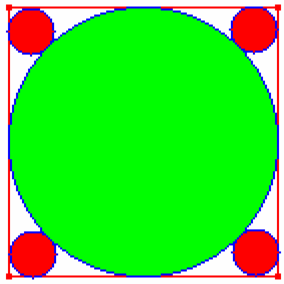
$s = \frac{2}{5}R$.

Generalització:
Si en lloc de quatre circumferències menudes hi ha 2n circumferències el radi de les circumferències mitjanes és:

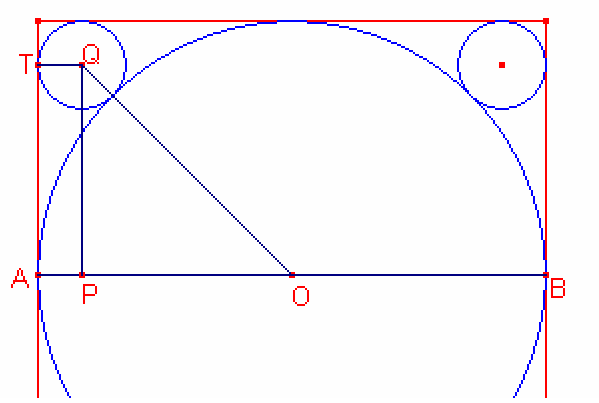
$s = \frac{n}{2n+1}R$



376.- En un quadrat de costat c s'ha inscrit una circumferència.
Calculeu el radi de les quatre circumferències tangents exteriors a la circumferència inscrita al quadrat i tangents als costats del quadrat.



Solució
Siga O el centre de la circumferència inscrita al quadrat.
Siga $\overline{AB} = c$ diàmetre de la circumferència.
Siga Q en centre d'una de les quatre circumferències.
Siga $\overline{TQ} = s$ el seu radi.
Siga P la projecció de Q sobre el diàmetre $\overline{AB}$.



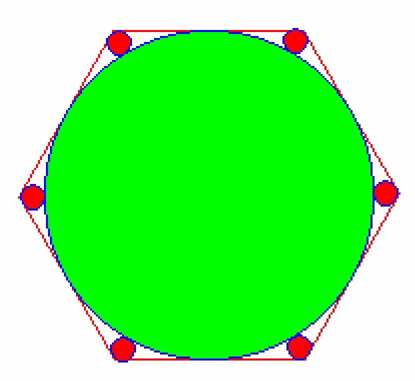
$\overline{OQ} = \frac{c}{2} + s$. $\overline{OP} = \frac{c}{2} - s$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{OPQ}$:

$\left(\frac{c}{2} + s\right)^2 = 2\left(\frac{c}{2} - s\right)^2$. Simplificant:

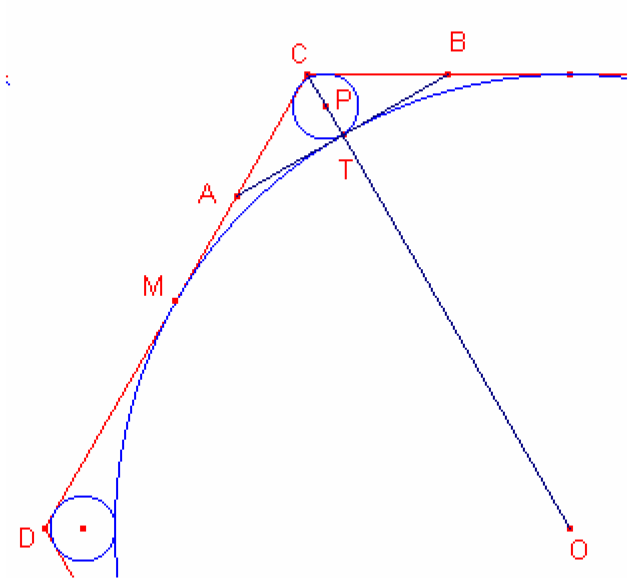
$4s^2 - 12cs + c^2 = 0$. Resolent l'equació en la incògnita s:

$s = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} c$.

377.- En un hexàgon regular de costat c s'ha inscrit una circumferència.
Calculeu el radi de les sis circumferències tangents exteriors a la circumferència inscrita a l'hexàgon i tangents als costats de l'hexàgon.



Solució:
Siga $\overline{CD} = c$ costat de l'hexàgon regular de centre O.
$\overline{OC} = \overline{CD} = c$.
Siga P el centre d'una de les sis circumferències menudes.
Siga $\overline{PT} = s$ el radi.
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMC}$:



$\overline{OM} = \overline{OT} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

$\overline{CT} = \overline{OC} - \overline{OT} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)c$.

$\angle CAT = 30°$.

$\overline{AC} = 2 \cdot \overline{CT} = \left(2 - \sqrt{3}\right)c$,

$\overline{AT} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AC} = \left(\frac{2\sqrt{3} - 3}{2}\right)c$.

$\overline{AB} = \left(2\sqrt{3} - 3\right)c$.

Calculant l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

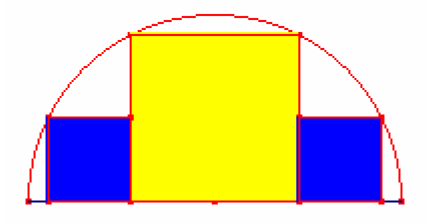
$$S_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CT}}{2} = \left(\frac{\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AB}}{2}\right)\overline{PT}.$$

$$\frac{\left(2\sqrt{3} - 3\right)c\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)c}{2} = \frac{\left(2\sqrt{3} - 3\right)c + 2\left(2 - \sqrt{3}\right)c}{2}s.$$

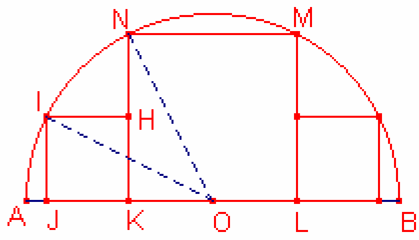
Resolent l'equació en la incògnita s:

$$s = \frac{7\sqrt{3} - 12}{2}c.$$

378.- En un semicercle de radi R s'han inscrit 3 quadrats (veure figura).
Determineu la mesura dels costats dels quadrats.



Solució:
Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$.
Siga KLMN el quadrat gran de costat $x = KL$.
Siga HIJK un dels quadrats menuts de costat $y = \overline{JK}$.



$\overline{OK} = \frac{x}{2}$, $\overline{ON} = R$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKN}$:

$x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = R^2$. Resolent l'equació en la incògnita x:

$x = \frac{2\sqrt{5}}{5}R$.

$\overline{OJ} = \overline{OK} + \overline{JK} = \frac{x}{2} + y$, $\overline{OI} = R$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OJI}$:

$\left(\frac{x}{2} + y\right)^2 + y^2 = R^2$.

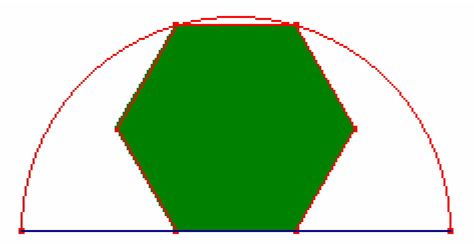
$\left(\frac{x}{2} + y\right)^2 + y^2 = R^2$. Simplificant:

$5y^2 + \sqrt{5}Ry - 2R^2 = 0$. Resolent l'equació en la incògnita y:

$y = \frac{\sqrt{5}}{5}R$.

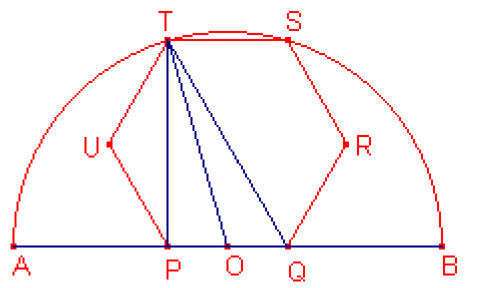
Notem que el costat del quadrat menut és la meitat del costat del quadrat gran.

379.- En un semicercle de radi r s'ha inscrit un hexàgon regular (veure figura).
Calculeu la mesura del costat de l'hexàgon regular.



Solució:

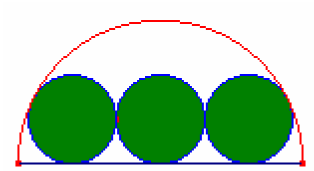
Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2r$.
Siga PQRSTU L'hexàgon regular de costat $x = PQ$.
$\overline{QT} = 2x$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQT}$:
$\overline{PT} = x\sqrt{3}$.
$\overline{OP} = \frac{x}{2}$, $\overline{OT} = r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPT}$:
$r^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(x\sqrt{3}\right)^2$. Resolent l'equació en la incògnita x:
$x = \frac{2\sqrt{13}}{13}R$.

380.- En un semicercle de radi r s'han inscrit 3 circumferències iguals, tangents al diàmetre i les dues més externes tangents al semicercle (veure figura). Determineu la mesura dels radis de les 3 circumferències.



Solució:

Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2r$.

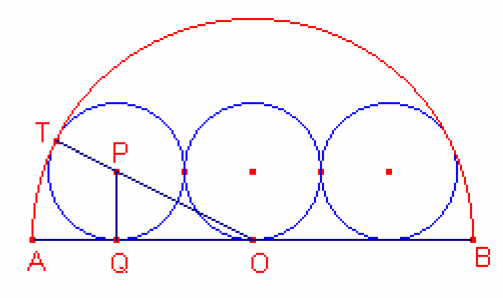
Siga P el centre de la circumferència i $\overline{PQ} = \overline{PT} = s$ el seu radi.

$\overline{OQ} = 2s$, $\overline{OP} = r - s$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$:

$(r - s)^2 = s^2 + (2s)^2$. Resolent l'equació en la incògnita s:

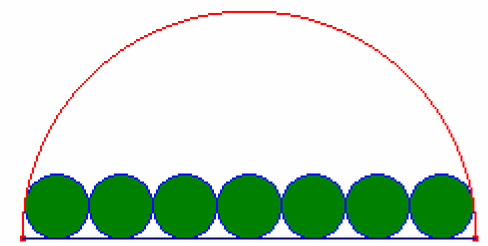
$s = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} r = \frac{1}{2\Phi} r$.



Generalització:

En un semicercle de radi r s'han inscrit 2n+1 circumferències iguals, tangents al diàmetre i les dues més externes tangents al semicercle (veure figura).

Determineu la mesura dels radis de les 2n+1 circumferències.



Solució:

El radi és: $s = \frac{-1+\sqrt{1+4n^2}}{4n^2} r$.