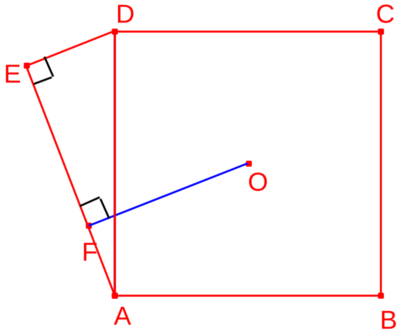
3791.- En la figura $ABCD$ és un quadrat de centre O.

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{AED}$. $E = 90°$

$\overline{AE} = 13, \overline{DE} = 5$

Calculeu la mesura del segment $\overline{OF}$ perpendicular al segment $\overline{AE}$

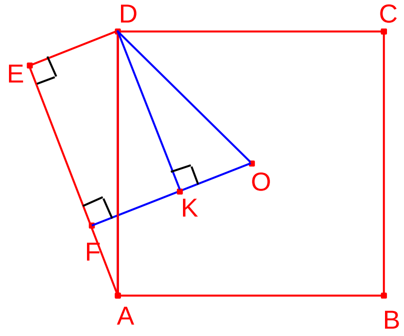


Solució:

Siga K la projecció de D sobre el segment $\overline{OF}$.

$\overline{FK} = 5$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AED}$:



$\overline{AD} = \sqrt{194}$

$\overline{OD} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{194}$

Siga $\alpha = \angle EAD = \angle ADK$

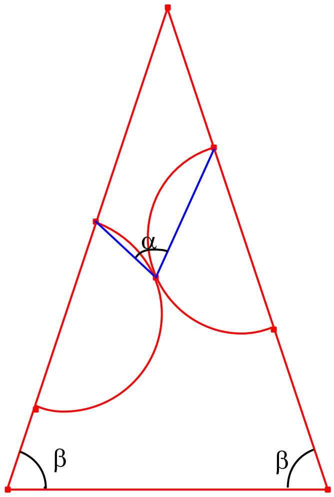
$\angle KDO = 45° - \alpha$

$\frac{\overline{OK}}{\overline{OD}} = \sin(45° - \alpha)$

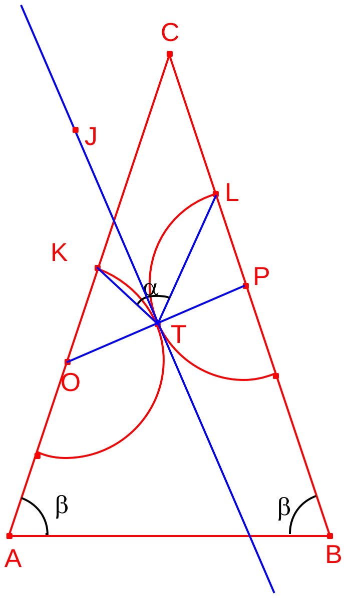
$\overline{OK} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{194}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{13}{\sqrt{194}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{5}{\sqrt{194}}\right) = 4$

$\overline{OF} = \overline{FK} + \overline{OK} = 5 + 4 = 9$

3792,. Dos semicircumferències tangents s'han inscrit en un triangle.
Calculeu la raó $\alpha : \beta$



Solució:

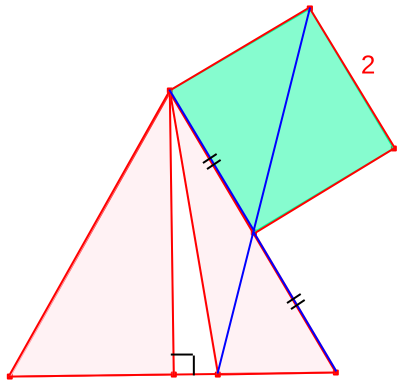


Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, A = B = \beta$
Siguen les semicircumferències tangents de centre O, P.
Siga T el punt de tangència.
Siga $\alpha = \angle KTL$
Siga la recta TJ tangent a les dues circumferències perpendicular al segment $\overline{OP}$

Siga $\angle KOT = \gamma,\ \angle LPT = \delta$
Per ser angles semi inscrits:
$\angle KTJ = \dfrac{1}{2}\gamma, \angle LTJ = \dfrac{1}{2}\delta$
$\alpha = \dfrac{1}{2}(\gamma + \delta)$

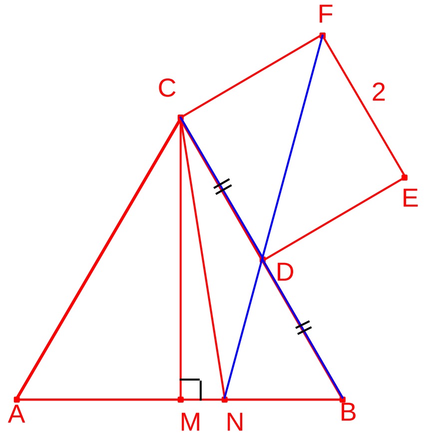
$C = 180° - 2\beta$
La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{OPC}$ és 180º:
$\gamma + \delta + 180° - 2\beta = 180°$
$\gamma + \delta = 2\beta$
Aleshores, $\alpha = \beta$

3793.- La figura està formada per un triangle equilàter i un quadrat de costat 2.
Calculeu la diferència entre l'àrea rosa i l'àrea verda.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 4$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$



aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:
$\overline{CM} = 2\sqrt{3}$
Siga D el punt mig del costat $\overline{BC}$
Siga el quadrat $CDEF$ de costat $\overline{CD} = 2$
Siga N la intersecció de la recta DF i el costat $\overline{AB}$
$\angle NDB = 45°, \angle DNB = 75°$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{NBD}$:

$$\frac{2}{\sin 75°} = \frac{\overline{NB}}{\sin 45°}$$

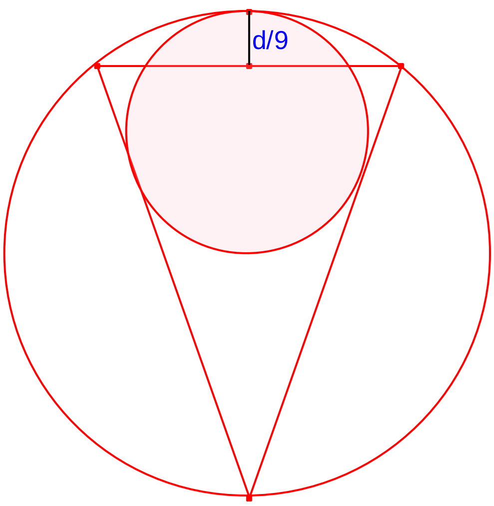
$$\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)} = \frac{\overline{NB}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\overline{NB} = 2\left(\sqrt{3}-1\right)$$

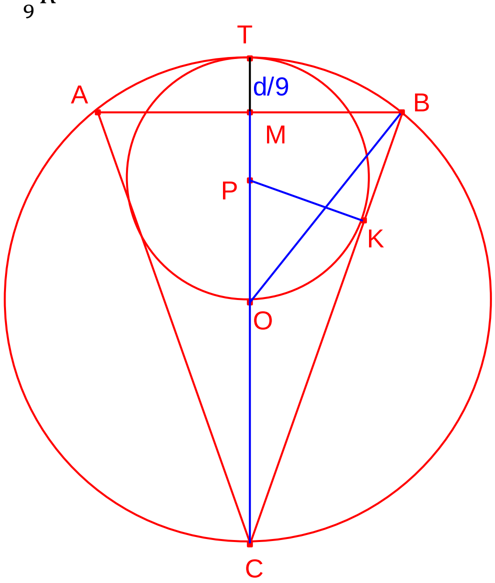
$$S_{rosa} = S_{AMC} + S_{NBC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot 2\left(\sqrt{3}-1\right) \cdot 2\sqrt{3} = 6$$

$$S_{rosa} - S_{verda} = 6 - 2^2 = 2$$

3794.- La figura està formada per dues circumferències tangents i un triangle.
La figura té simetria respecte del diàmetre d vertical
La circumferència exterior esta un nové del diàmetre sobre la corda horitzontal.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos cercles.

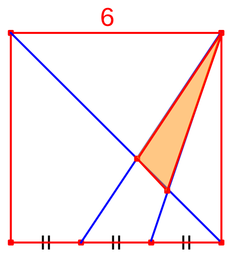


Solució:
Soga la circumferència exterior de centre O i radi $\overline{OB} = R$
Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AC} = \overline{BC}$
Siga la circumferència de centre P de radi $\overline{PT} = \overline{PK} = r$ tangent a la circumferència anterior i als costat $\overline{AC}, \overline{BC}$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{MT} = \frac{1}{9}d = \frac{2}{9}R$

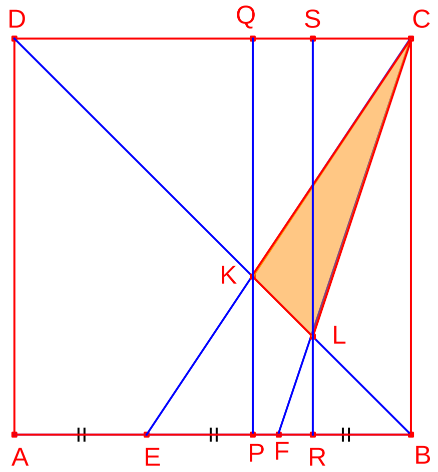


$\overline{OM} = \frac{7}{9}R$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$:
$\overline{BM} = \frac{4\sqrt{2}}{9}R$
$\overline{CM} = \frac{16}{9}R$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CMB}$:
$\overline{BC} = \frac{4\sqrt{2}}{3}R$
$\overline{CP} = 2R - r$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CMB}, \overset{\Delta}{CKP}$, són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{r}{\frac{4\sqrt{2}}{9}R} = \frac{2R - r}{\frac{4\sqrt{2}}{3}R}$$
$$\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$$
La proporció d'àrees dels dos cercles és:
$$\frac{S_P}{S_O} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

3795.- Un costat del quadrat de costat 6 s’ha dividit en tres parts iguals.
Calculeu l’àrea del triangle ombrejat.



Solució:



Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 6$
Siguen E, F punts del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB} = 2$
Siga el triangle $\overset{\Delta}{KLC}$
Siguen P, Q les projeccions de K sobre els costats $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament.
Siguen R, S les projeccions de L sobre els costats $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament.
Els triangles $\overset{\Delta}{EBK}, \overset{\Delta}{CDK}$ són semblants i de raó $2 : 3$
Aleshores: $\overline{QK} = \frac{3}{2}\overline{PK}$

$$\overline{QK} = \frac{18}{5}$$

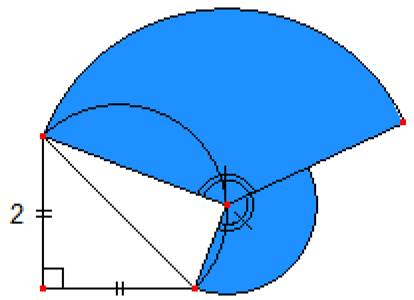
Els triangles $\overset{\Delta}{FBL}, \overset{\Delta}{CDL}$ són semblants i de raó $1 : 3$
Aleshores: $\overline{SL} = 3 \cdot \overline{RK}$

$$\overline{SL} = \frac{9}{2}$$

L’àrea ombrejada és:

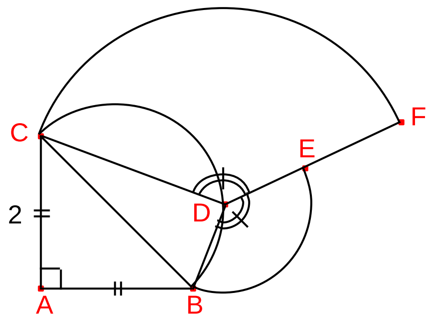
$$S_{KLC} = S_{CDL} - S_{CDK} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{18}{5} = \frac{27}{10}$$

3796.- La figura està formada per un triangle una semicircumferència i dos sectors d'igual angle. Calculeu l'àrea de la zona ombrejada pels dos sectors.



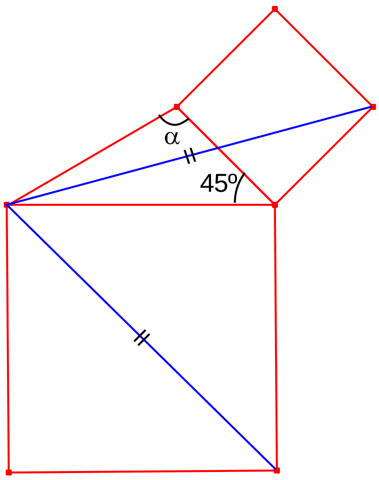
Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de catets $\overline{AB} = \overline{AC} = 2$
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{BC} = 2\sqrt{2}$
El triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és rectangle, $D = 90°$
$\angle EDB = \angle CDF = 135°$
Siga $\overline{BD} = \overline{DE} = x, \overline{CD} = \overline{DF} = y$, radis dels sectors.

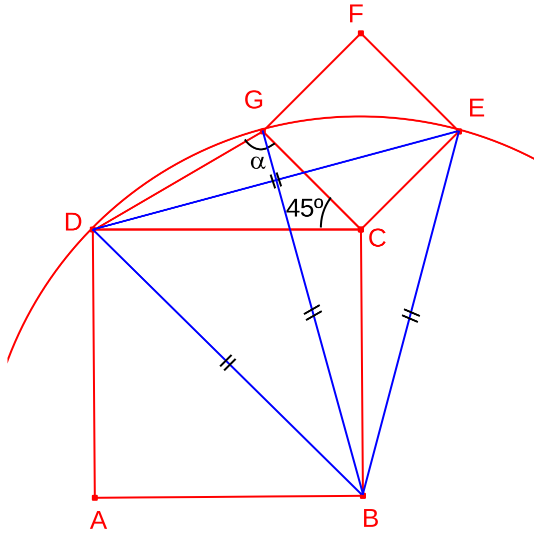


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCD}$:
$x^2 + y^2 = 8$
L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = \dfrac{3}{8}\pi x^2 + \dfrac{3}{8}\pi y^2 = 3\pi$

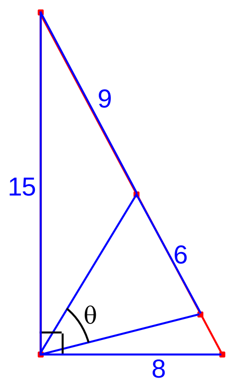
3797.- La figura està formada per dos quadrats i un triangle amb un angle de 45º.
Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:
Siguen els quadrats $ABCD, CEFG$.
Siga el triangle $\overset{\Delta}{CDG}, C = 45°$
Els triangles $\overset{\Delta}{BCE}, \overset{\Delta}{DCE}$ són iguals (CAC)
Aleshores, $\overline{BE} = \overline{DE}$
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BDE}$ és equilàter
$\angle CBE = 60° - 45° = 15°$
Els triangles $\overset{\Delta}{BCE}, \overset{\Delta}{BCG}$ són iguals (CAC)
$\angle CBG = \angle CBE = 15°$
El centre de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{DGE}$ és el punt B.
$\angle GDE = \frac{1}{2}\angle GBE = 15°$
$\angle GDE = \frac{1}{2}\angle GBE = 15°$
$\angle EDC = 60° - 45° = 15°$
$\angle CDG = 15° + 15° = 30°$
$\alpha = \angle DGC = 180° - (30° + 45°) = 105°$



3798.- Siga el triangle rectangle de catets 15, 8.
Calculeu la mesura de l’angle θ



Solució:

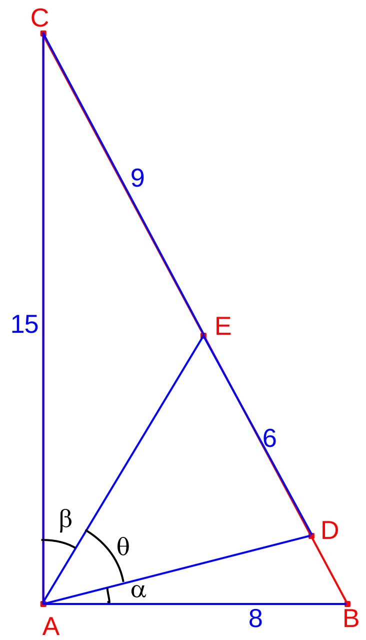
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de catets $\overline{AC} = 15. \overline{AB} = 8$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{BC} = 17$
$\overline{CD} = 15, \overline{BE} = 8$

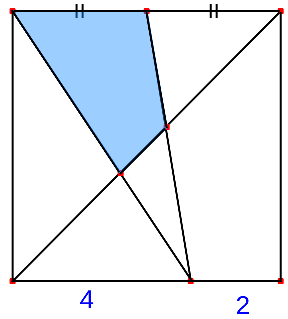
Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADC}, \overset{\Delta}{ABE}$ són isòsceles.
Siguen $\alpha = \angle BAD, \beta = \angle EAC$
$\alpha + \beta + \vartheta = 90°$

$\angle AEB = \angle EAB = \alpha + \theta$
$\angle ADC = \angle DAC = \beta + \theta$

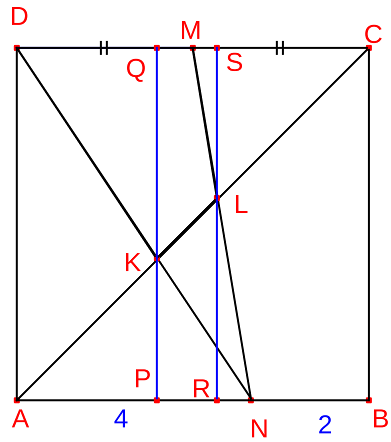
La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és 180º
$\theta + \alpha + \theta + \beta + \theta = 180°$
$2\theta = 90°$
$\theta = 45°$



3799.- Un costat d'un quadrat s'ha dividit en dos segments de longituds 4, 2.
El costat oposat s'ha dividit en dues parts iguals.
Calculeu l'àrea del quadrilàter ombrejat.

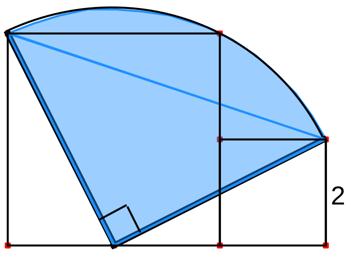


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 6$
Siguen N punt del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{AN} = 4, \overline{BN} = 2$
Siga el quadrilàter $CDKL$.
Siguen P, Q les projeccions de K sobre els costats $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament.
Siguen R, S les projeccions de L sobre els costats $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament.



Els triangles $\overset{\Delta}{CDK}, \overset{\Delta}{ANK}$ són semblants i de raó $3 : 2$
Aleshores: $\overline{QK} = \frac{3}{2}\overline{PK}$
$$\overline{QK} = \frac{18}{5}$$
Els triangles $\overset{\Delta}{CML}, \overset{\Delta}{ANL}$ són semblants i de raó $3 : 4$
Aleshores: $\overline{SL} = \frac{3}{4} \cdot \overline{RK}$
$$\overline{SL} = \frac{18}{7}$$
L'àrea ombrejada és:
$$S_{KLC} = S_{CDK} - S_{CML} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{18}{2} - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{18}{7} = \frac{243}{35}$$

3800.- La figura està formada per dos quadrats, el menut de costat 2, i un quadrant.
Calculeu l'àrea del quadrant.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.
Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = 2$
Siga el quadrat de centre K i radi $\overline{KF} = \overline{KC} = \overline{KD}$
Els triangles rectangles $K\overset{\Delta}{E}F, C\overset{\Delta}{B}K, D\overset{\Delta}{A}K$ són iguals.
Aleshores, $\overline{AB} = 4$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $D\overset{\Delta}{A}K$:
$\overline{DK}^2 = 20$
L'àrea del quadrant és:
$S_{quadrant} = \frac{1}{4}\pi \cdot \overline{DK}^2 = 5\pi$