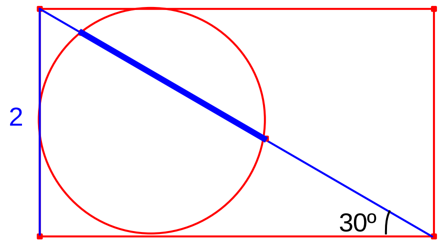
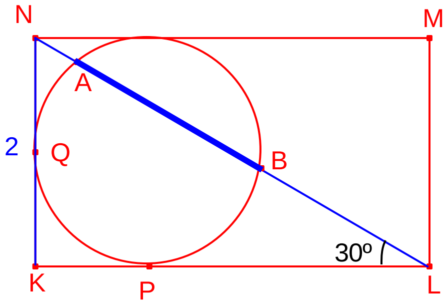
3801.- En la figura, el costat menor del rectangle mesura 2, la diagonal i el costat gran formen 30º. Calculeu la mesura de la cordo que forma la diagonal i la circumferència tangent a tres costats del rectangle.



Solució:



Siga el rectangle $KLMN$ tal que $\overline{KN} = 3, \angle KLN = 30°$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLN}$:

$\overline{LN} = 4, \overline{KL} = 2\sqrt{3}$

$\overline{PL} = 2\sqrt{3} - 1$

Siguen P, Q els punts de tangència de la circumferència i els costats $\overline{KL}, \overline{KN}$, respectivament.

Aplicant la potència de L respecte de la circumferència:

$\overline{BL} \cdot (\overline{AB} + \overline{BL}) = \overline{PL}^2$

$\overline{BL} \cdot (\overline{AB} + \overline{BL}) = 13 - 4\sqrt{3}$

Aplicant la potència de N respecte de la circumferència:

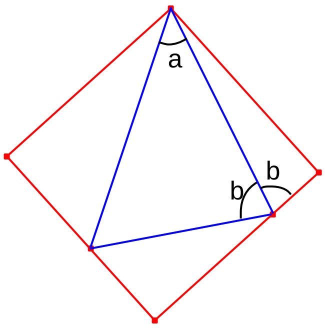
$\overline{AN} \cdot (\overline{AB} + \overline{AN}) = \overline{NQ}^2$

$\left(4 - (\overline{AB} + \overline{BL})\right)(4 - \overline{BL}) = 1$

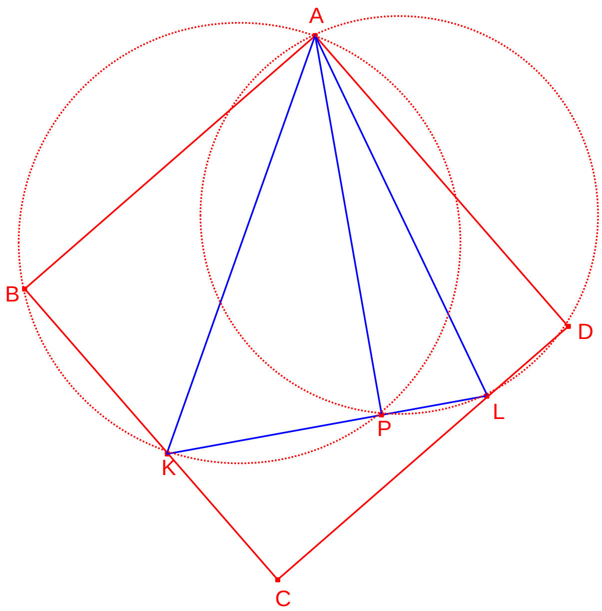
Resolent el sistema format per les dues equacions:

$\overline{AB} = \sqrt{2\sqrt{3}}$

3802.- La figura està formada per un quadrat i un triangle.
Calculeu la mesura de l’angle a



Solució:



a=AngleKBL

b=AngleALD=KLA

els triangles rectangles ADL, APL són iguals

PL=DL

AP=AD

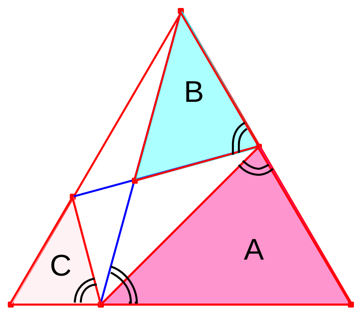
els triangle ABK, APK són iguals

AngleCKL=2b-180º

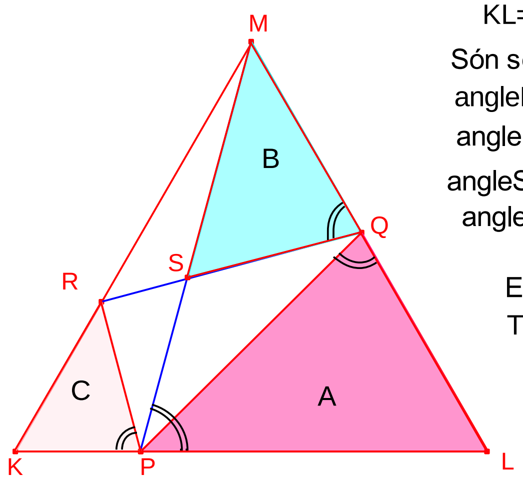
angle AKB 135º-b

a=45º

3803.- En un triangle equilàter s’han dibuixat tres triangles d’àrees A, B, C.
Calculeu la proporció: $A : B : C$



Solució:



KL=1

Són semblants, PKR, QLP, QMR, PLM
angleKPR=a
angle QPL=120º-a angle RQP=180º-2a
angleSPQ=2a-120º angle PSQ=120º
angleMSQ=60º

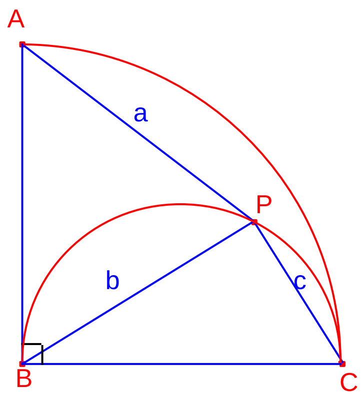
KP=x
Els triangles PKR, QSM són semblants
Tales als triangles PKR, PLM
KR=x/(1-x)
Tales PKR, QLP
QL=(1-x)²
Tales PKR, QMR
(x/(1-x)/((1-2x)/(1-x)=x/((2-x)x)
x=KP=2-sqrt(3) PL=1-x
PR=(x·sqrt(x²-x+1))/(1-x)
Tales als triagles PKR, QLP
LQ=(1-x)², QM=(2-x)x

A:C=((1-x)/x)²=4

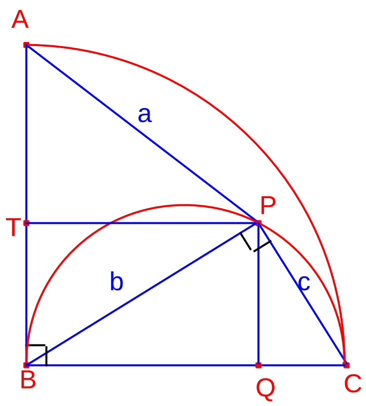
B/C=QM/PR=((2-x)(1-x)/(x·sqrt(x²-x+1))²=2

A : B : C = 4 : 2: 1

3804.- Siga P un punt de la semicircumferència de diàmetre $\overline{BC}$.
Siguen $a = \overline{AP}, b = \overline{BP}, c = \overline{CP}$
Proveu que $a^2 = b^2 + (b - c)^2$



Solució:
Siga el quadrant de centre B i radi $\overline{BC} = 2r$
$\angle BPC = 90°$
$b^2 + c^2 = 4r^2$
Siga Q la projecció de P sobre $\overline{BC}$
Siguen $\overline{BQ} = x, \overline{PQ} = y$
$x^2 + y^2 = b^2$

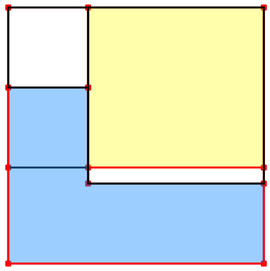


Els triangles rectangles $B\overset{\Delta}{P}C, B\overset{\Delta}{Q}P$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales.
$\frac{y}{x} = \frac{2r - x}{y}$
$y^2 = x(2r - x)$
Siga T la projecció de P sobre $\overline{AB}$.
$\overline{AT} = 2r - y$

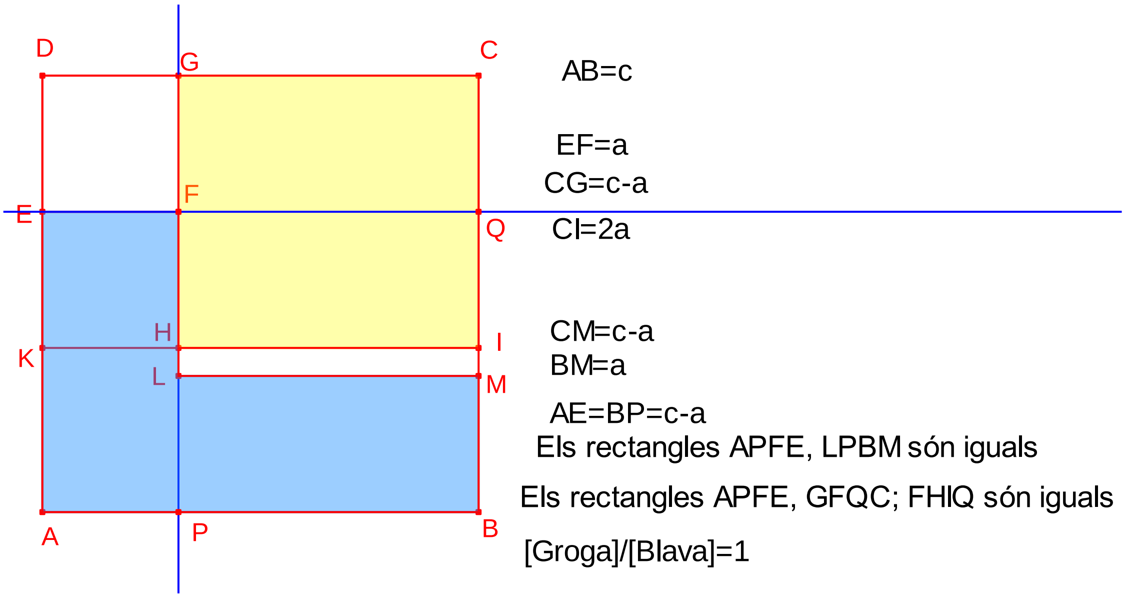
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $A\overset{\Delta}{T}P$:
$a^2 = x^2 + (2r - y)^2 = x^2 + y^2 + 4r^2 - 2ry$
$a^2 = b^2 + 4r^2 - 2ry$

L'àrea del triangle rectangle $B\overset{\Delta}{P}C$ és:
$\frac{1}{2} 2ry = \frac{1}{2} bc$
$2ry = 2bc$
$a^2 = b^2 + b^2 + c^2 - 2bc = b^2 + (b - c)^2$

3805.- Un quadrat conté tres quadrats.
Calculeu l'àrea entre la zona groga i la blava.



Solució:



AB=c

EF=a

CG=c-a

CI=2a

CM=c-a

BM=a

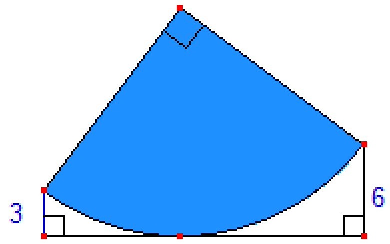
AE=BP=c-a

Els rectangles APFE, LPBM són iguals

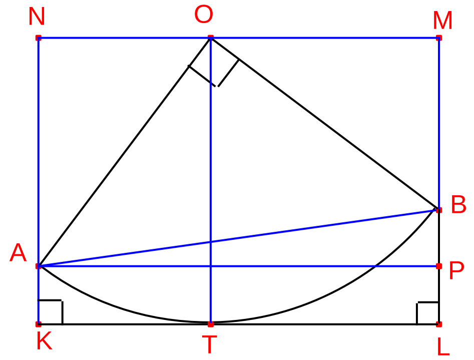
Els rectangles APFE, GFQC; FHIQ són iguals

[Groga]/[Blava]=1

3806.- En la figura, calculeu l'àrea del quadrant.



Solució:



Siga el quadrat de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OT} = R$
Siga el rectangle $KLMN$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOB}$:
$\overline{AB} = R\sqrt{2}$

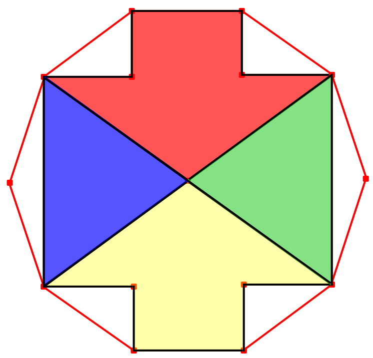
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANO}$:
$\overline{NO} = \sqrt{R^2 - (R-3)^2} = \sqrt{6R - 9}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMO}$:
$\overline{MO} = \sqrt{R^2 - (R-6)^2} = \sqrt{12R - 36}$

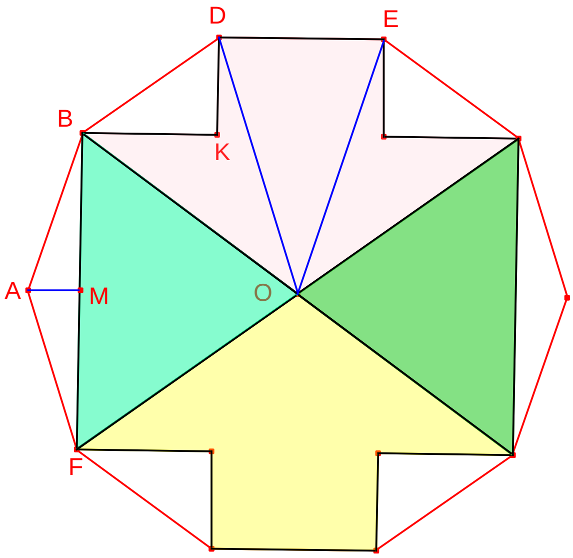
Siga P la projecció de A sobre $\overline{LB}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APB}$:
$\overline{AP} = \sqrt{2R^2 - 9}$
$\sqrt{2R^2 - 9} = \sqrt{6R - 9} + \sqrt{12R - 36}$
Resolent l'equació:
$R = 15$
L'àrea del quadrant és:
$S_{quadrant} = \frac{1}{4}\pi 15^2 = \frac{225\pi}{4}$

3807.- Donat el decàgon regular determineu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del decàgon regular.



Solució:



AB=1

[Decàgon]=10·[DOE]=5·Phi²·sin36º

2·[BKD]=(!/2)·sin108º=(1/2)·sin 72º

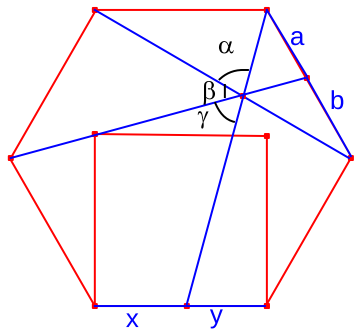
[ABF]=(1/2)sin36º

[Blanca]=4[BKD]+2[ABF]=sin 72º+sin36º=

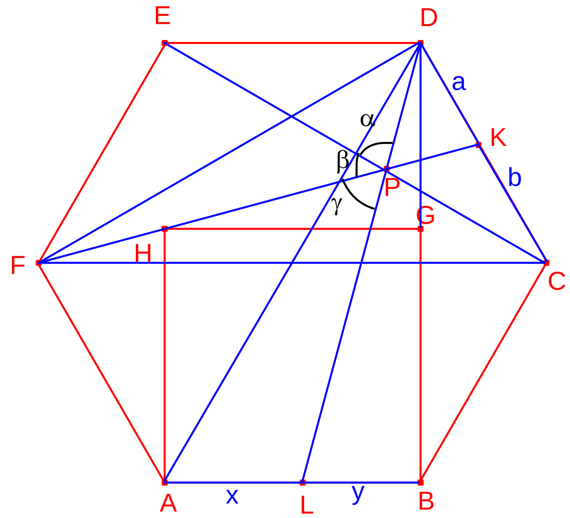
=sin(36º)(1+2·cos36º)=Phi²·sin36º

[Ombrejada]/[Decàgon]=4/5

3808.- La figura està formada per un hexàgon regular i un quadrat.
Calculeu les proporcions $a : b, y : x$
Calculeu les mesures dels angles α, β, γ



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrat $ABGH$
$\angle FAH = 30°$
$\angle EFK = 45°$
$\angle FKD = 75°$
$\angle FEC = \angle FDC = 90°, \angle DEC = 30°$
$\beta = 45°, \overline{EF} = \overline{EP} = \overline{ED}$
$\alpha = 75°. \gamma = 60°$

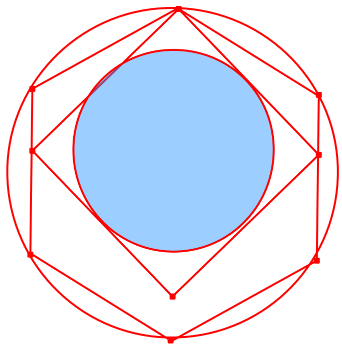


$\angle DAB = 60°$
$\angle ALP = 360° - (120° + 75° + 60°) = 105°$
$\angle ADL = 15°$
$\angle BDL = 30° - 15° = 15°$

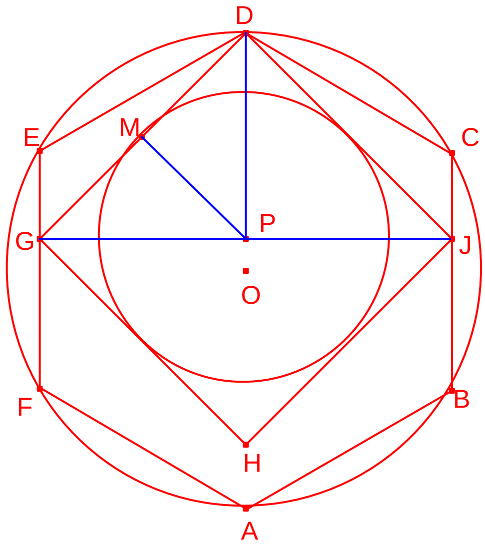
Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$
$$\frac{y}{x} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\angle DFK = \angle KFC = 15°$
Elsl triangles $\overset{\Delta}{FDC}, \overset{\Delta}{DBA}$ són iguals i $\overline{DL}$ és bisectriu del triangle $\overset{\Delta}{FDC}$
$$\frac{a}{b} = \frac{\overline{FD}}{\overline{FC}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3809.- La figura està formada per una circumferència circumscrita a un hexàgon regular i una circumferència inscrita a un quadrat.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos cercles.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 1$ i centre O.
Siga el quadrat $DGHJ$ de centre P.



$\overline{GJ} = \sqrt{3}$

$\overline{PG} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{DG} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

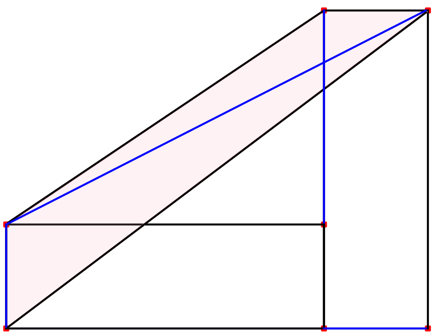
Siga M el punt mig del costat

$\overline{PM} = \frac{1}{2}\overline{DG} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

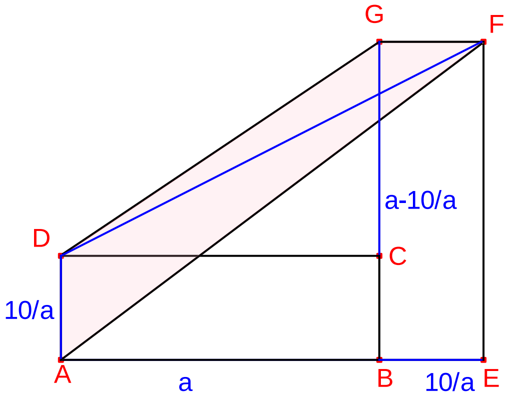
La proporció entre les àrees dels dos cercles és:

$$\frac{S_P}{S_O} = \left(\frac{\overline{PM}}{\overline{OA}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

3810.- Els rectangles de la figura són iguals i d'àrea 10.
Calculeu l'àrea del quadrilàter ombrejat.



Solució:



[AFGD]=[ADF]+[FGD]=(1/2)(a+10/a)(10/a)+(1/2)(a-10/a)(10/a)=10