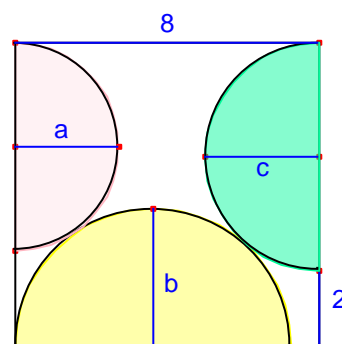


### Problemes de Geometria per a l'ESO 383

3821.- En un quadrat de costat 8, s'han dibuixat tres semicercles de radis  $a, b, c$ .

Calculeu:

$$\frac{c}{ab}$$



Solució:

Siga el quadrat  $ABCD$  de costat  $\overline{AB} = 8$

Siguen els cercles de radis  $a = \overline{KD}$ ,  $b = \overline{LA}$ ,  $c = \overline{MC}$

Siga  $\overline{BE} = 2$ ,  $\overline{CE} = 6$

$$c = 3$$

$$\overline{BM} = 5, \overline{LM} = b + 3, \overline{LB} = 8 - b$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle LBM$ :

$$(b + 3)^2 = (8 - b)^2 + 5^2$$

Resolent l'equació:

$$b = \frac{40}{11}$$

$$\overline{KA} = 8 - a, \overline{KL} = a + b$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle KAL$ :

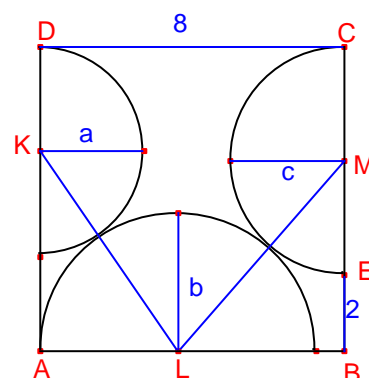
$$(a + b)^2 = b^2 + (8 - a)^2$$

$$\left(a + \frac{40}{11}\right)^2 = \left(\frac{40}{11}\right)^2 + (8 - a)^2$$

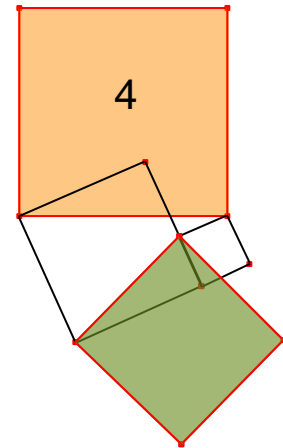
Resolent l'equació:

$$a = \frac{11}{4}$$

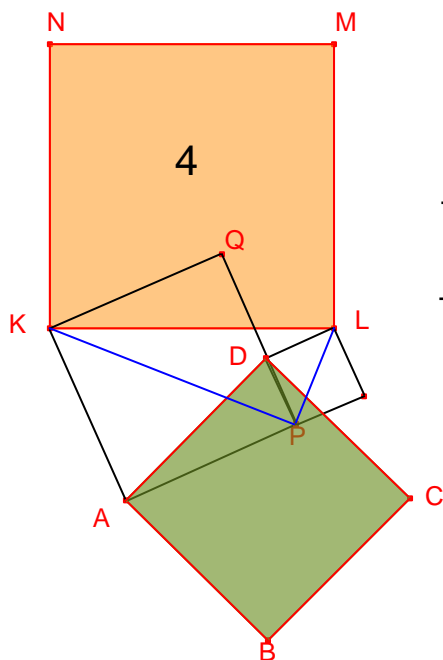
$$\frac{c}{ab} = \frac{3}{\frac{11}{4} \cdot \frac{40}{11}} = \frac{3}{10}$$



3822.- La figura està formada per quatre quadrats.  
 El quadrat taronja té àrea 4.  
 Calculeu l'àrea del quadrat verd.



Solució:



$$KL=2$$

$$DL=a, AK=b$$

$$\text{AngleKPL}=90^\circ$$

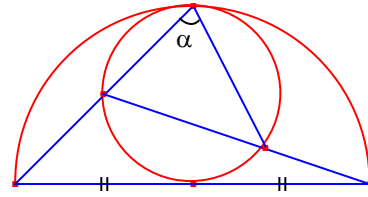
Teorema Pitàgores KLP

$$2a^2+2b^2=4$$

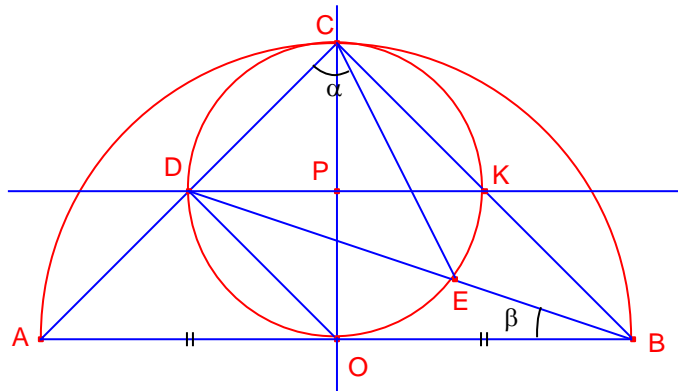
Teorema Pitàgores APD

$$[ABCD]=AD^2=a^2+b^2=2$$

3823.- La figura està formada per una semicircumferència una circumferència tangent al semicercle i al punt mig del diàmetre. Calculeu la mesura de l'angle  $\alpha$



Solució:



Siga la semicircumferència de centre  $O$  i diàmetre  $\overline{AB} = 2R$

Siga la circumferència de diàmetre  $\overline{OC} = R$

Siga  $\alpha = \angle DCE$

$\angle CAB = \angle CBA = 45^\circ$

Sig  $K$  la intersecció de la circumferència i el segment  $\overline{BC}$

$\overline{DK}$  és paral·lel a  $\overline{AB}$

Siga  $\beta = \angle ABD = \angle KDB$

Siga  $c = \overline{BK}$

Aplicant la potència de  $B$  respecte de la circumferència de diàmetre  $\overline{OC}$ :

$$c \cdot R\sqrt{2} = R^2$$

$$c = \frac{\sqrt{2}}{2}R = \frac{1}{2}\overline{BC}$$

Aleshores,  $DK$  és paral·lela mitjana de triangle  $\triangle ABC$

El centre  $P$  de la circumferència pertany al segment  $\overline{DK}$

$\angle ACO = 45^\circ$

Per ser  $\angle AOD$  semiinscrit en la circumferència:

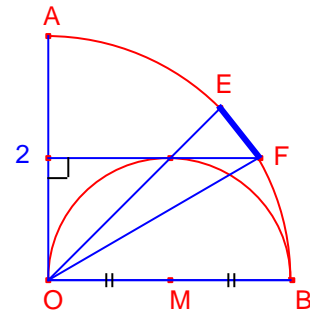
$\angle AOD = 45^\circ$

Per ser  $\angle ABD$  inscrit en la semicircumferència:

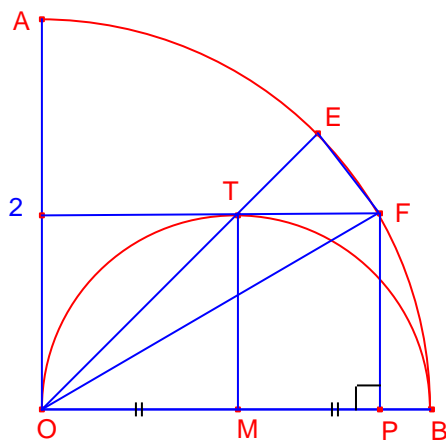
$$\angle ABD = \frac{1}{2}45^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ + \beta = \frac{1}{2} \cdot 135^\circ$$

3824.- La figura està formada per un quadrant de radi 2 i una semicircumferència de diàmetre el radi  $\overline{OB}$   
 Calculeu la mesura del segment  $\overline{EF}$



Solució:



$$OA=2$$

$$OM=BM=1$$

$$MT=1, OF=2$$

$$\text{AngleFOP}=30^\circ$$

$$OM=MT=1$$

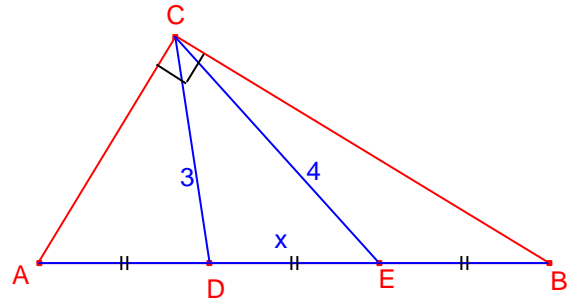
$$\text{angleTOM}=45^\circ$$

Teorema coinus OEF

$$EF^2=8-2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

$$EF=\sqrt{8-2(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$

3825.- Siga el triangle rectangle  $\triangle ABC$ ,  $C = 90^\circ$   
 Siguen els punts  $D, E$  de la hipotenusa tals que  
 $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EB}$   
 Si  $\overline{CD} = 3, \overline{CE} = 4$ , calculeu la mesura de  $x = \overline{DE}$



Solució:

Siguen  $\overline{AC} = b, \overline{BC} = a$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle ABC$ :  
 $a^2 + b^2 = 9x^2$

Aplicant la propietat de la mitjana  $\overline{CD}$  del triangle  $\triangle AEC$ :

$$3 = \frac{\sqrt{2b^2 + 2 \cdot 4^2 - 4x^2}}{2}$$

$$2 = b^2 - 2x^2$$

Aplicant la propietat de la mitjana  $\overline{CE}$  del triangle  $\triangle DBC$ :

$$4 = \frac{\sqrt{2a^2 + 2 \cdot 3^2 - 4x^2}}{2}$$

$$23 = a^2 - 2x^2$$

Sumant les dues expressions:

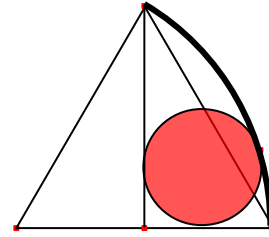
$$25 = a^2 + b^2 - 4x^2$$

$$25 = 9x^2 - 4x^2$$

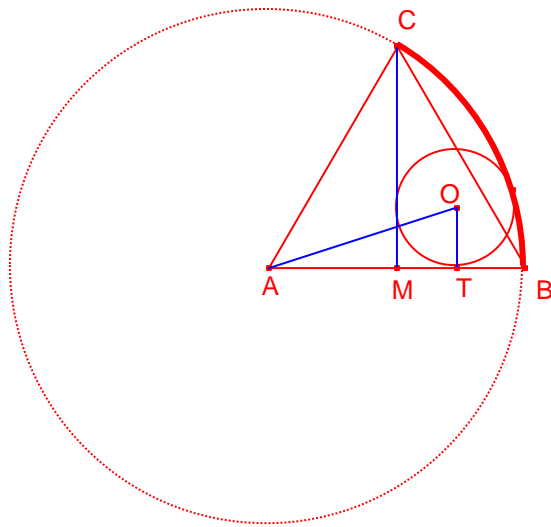
Resolent l'equació:

$$x = \sqrt{5}$$

3826.- La figura està formada per un triangle equilàter amb una altura.  
 Dos dels seus costats formen els radis del sector circular.  
 Calculeu la proporció de l'àrea del cercle (tangent a l'arc, la altura i un costat del triangle) i l'àrea del sector.



Solució:



$$AB=1$$

$$OT=R$$

$$AO=1-R, AT=(1/2)+R$$

Teorema Pitàgores ATO

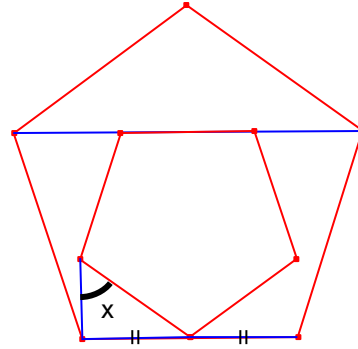
$$(1-R)^2=r^2+((1/2)+R)^2$$

$$R=(-3+2\cdot\sqrt{3})/2$$

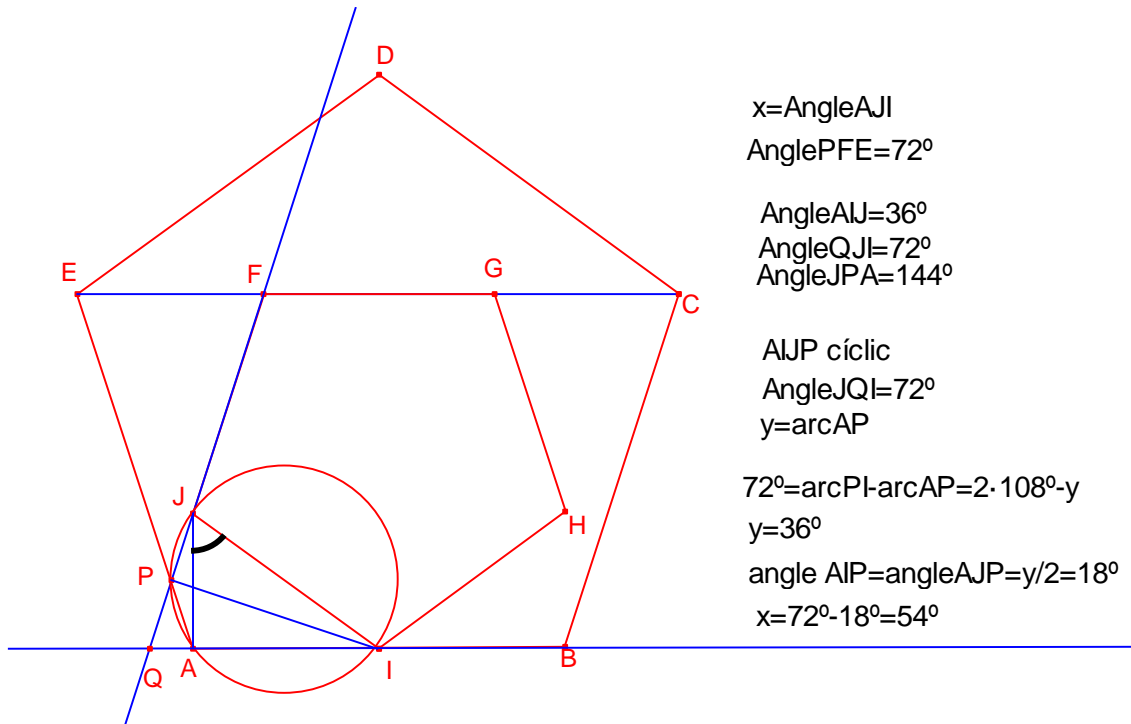
Proporció:

$$R^2/((1/6)\cdot 1^2)=(63-36\cdot\sqrt{3})/2$$

3827.- La figura està formada per dos pentàgons regulars.  
 Calculeu la mesura de l'angle  $x$



Solució:

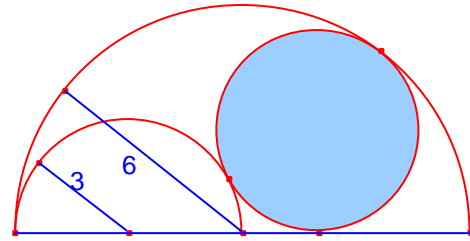


$x = \text{AngleAJI}$   
 $\text{AnglePFE} = 72^\circ$   
 $\text{AngleAJ} = 36^\circ$   
 $\text{AngleQJI} = 72^\circ$   
 $\text{AngleJPA} = 144^\circ$

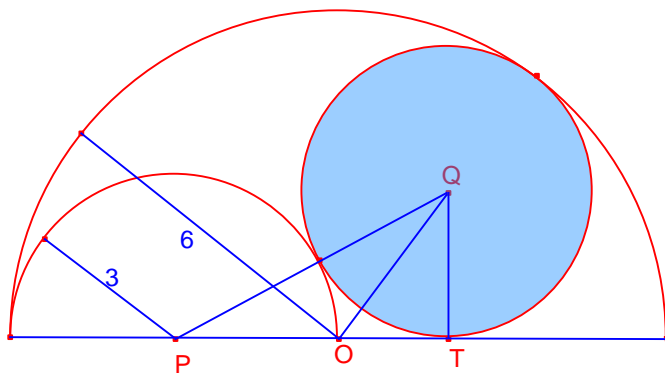
AIJP cíclic  
 $\text{AngleJQI} = 72^\circ$   
 $y = \text{arcAP}$

$72^\circ = \text{arcPI} - \text{arcAP} = 2 \cdot 108^\circ - y$   
 $y = 36^\circ$   
 $\text{angle AIP} = \text{angle AJP} = y/2 = 18^\circ$   
 $x = 72^\circ - 18^\circ = 54^\circ$

3828.- La figura està formada per dos semicercles de radis 3, 6, i un cercle tangent als dos semicercles i al diàmetre. Calculeu l'àrea del cercle.



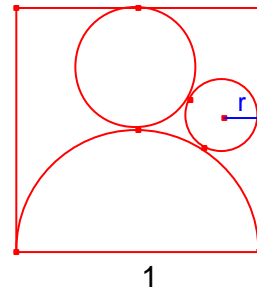
Solució:



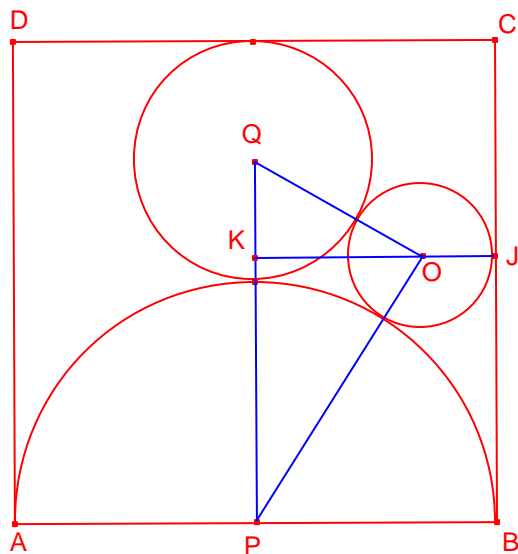
$$\begin{aligned}
 r &= QT \\
 PQ &= 3+r \\
 OQ &= 6-r \\
 OT &= a \\
 PT &= 3+r \\
 \text{teorema Pitàgore } PTQ, OTQ \\
 (3+r)^2 &= (3+a)^2 + r^2 \\
 (6-r)^2 &= a^2 + r^2 \\
 r &= 8/3 \\
 \text{àrea} &= (64/9)\pi
 \end{aligned}$$



3829.- En un quadrat de costat 1 s'ha dibuixat sobre un costat una semicircumferència i dos cercles tangents. Calculeu la mesura de radi  $r$



Solució:

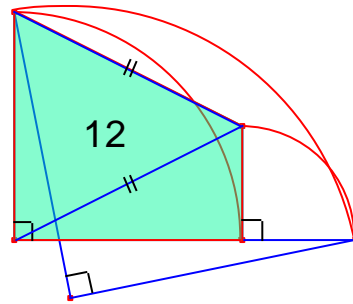


$$\begin{aligned}
 AB &= 1 \\
 OJ &= r \\
 KJ &= 1/2 \\
 QK &= a \\
 QO &= (1/4) + r \\
 KO &= (1/2) - r \\
 OP &= (1/2) + r \\
 PK &= (3/4) - a
 \end{aligned}$$

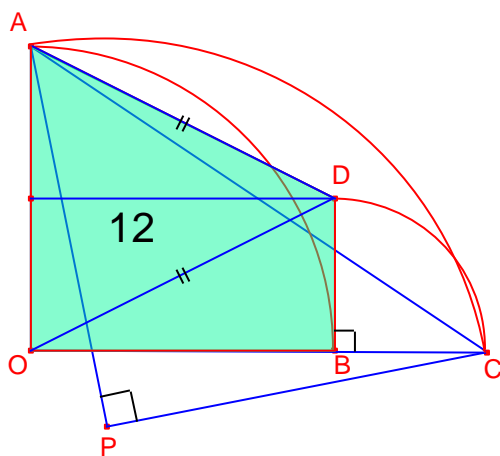
Teorema Pitàgores QKO, PKO

$$\begin{aligned}
 ((1/4) + r)^2 &= a^2 + ((1/2) - r)^2 \\
 ((1/2) + r)^2 &= ((1/2) - r)^2 + ((3/4) - a)^2 \\
 a &= (-9 + 4 \cdot \sqrt{6}) / 4 \\
 r &= (15 - 6 \cdot \sqrt{6}) / 2
 \end{aligned}$$

3830.- La figura està formada per tres quadrants.  
 L'àrea del quadrilàter ombrejat és 12.  
 Calculeu l'àrea del quadrant més gran.



Solució:



$$OA=r$$

$$BD=r/2$$

$$[OBDA]=12=(3/4)r^2$$

$$r=4$$

$$OC=(3/2)r$$

$$AC^2=(13/4)r^2$$

$$PC^2=(13/8)r^2$$

$$S=(1/4)\text{Pi}\cdot(13/8)r^2=(13/2)\text{Pi}$$