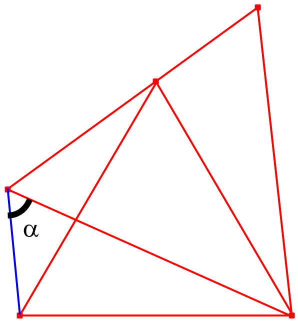
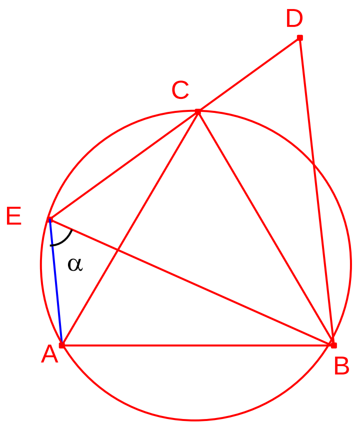
**Problemes de Geometria per a l'ESO 385**

3841.- La figura està formada per dos triangles equilàters.
Calculeu la mesura de l'angle $\alpha$



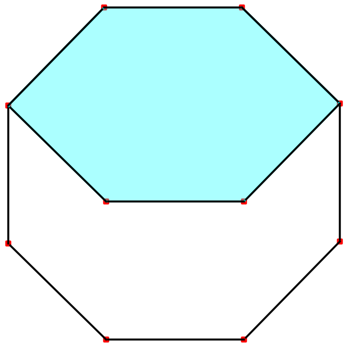

Solució:



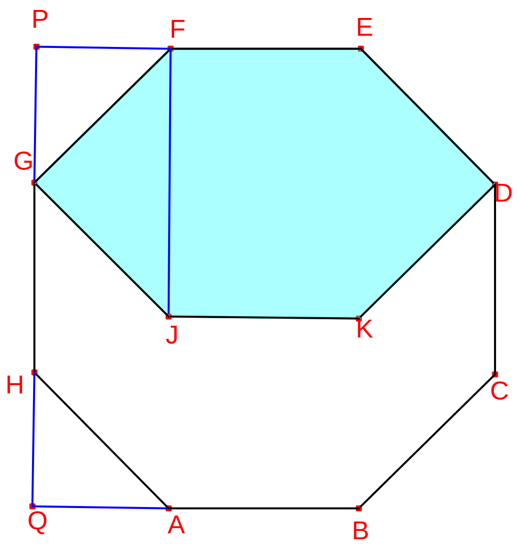

Angle DEB=Angle CAB=60º
ABCE inscripltible

Angle AEB=Angle ACB=60º

3842.- La figura està formada per un octògon regular i un hexàgon equilàter.
Calculeu la proporció entre l'àrea del hexàgon i la de l'octògon.

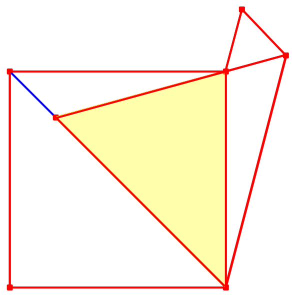


Solució:




AB=1
angleGFJ=45º
angle FGJ=90º
PG=sqrt(2)/2
PQ=1+sqrt(2)
[ABCDEFGH]=PQ²-1²=2+2·sqrt(2)
[DEFGJK]=1²+1·sqrt(2)=1+sqrt(2)
[DEFGJK]/[ABCDEFGH]=1/2

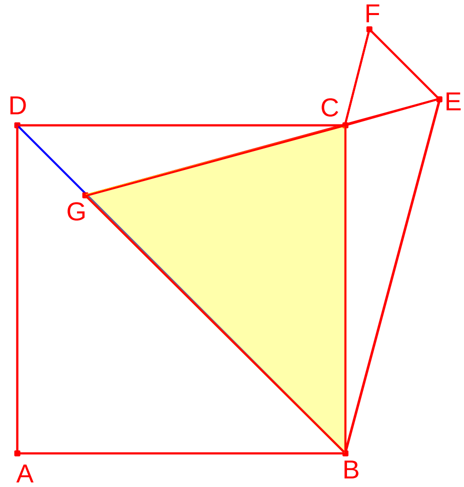
3843.- La figura està formada per dos triangles equilàters i un quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{BEG}$ de costat $\overline{BE} = c$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{CEF}$ de costat $\overline{CE} = d$




Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCG}$:

$$\frac{c}{\sin 75°} = \frac{\overline{CG}}{\sin 45°} = \frac{1}{\sin 60°}$$

$$c = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6}, \overline{CG} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$d = c - \overline{CG} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6}$$

L'àrea total és:

$$S_{total} = S_{ABCD} + S_{CEF} + S_{BCE} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{4}d^2 + \frac{1}{2}c \cdot \sin 15° = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}$$

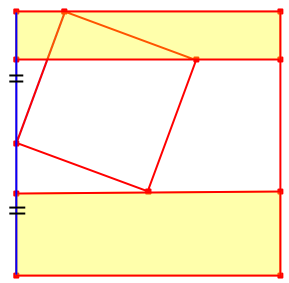
L'àrea ombrejada és:

$$S_{BCG} = \frac{1}{2}c \cdot \sin 45° = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}$$

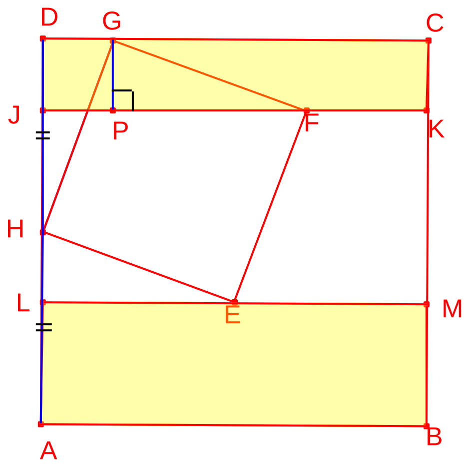
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{BCG}}{S_{total}} = \frac{1}{3}$$

3844.- La figura està formada per dos quadrats i dos rectangles ombrejats.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat gran.



Solució:



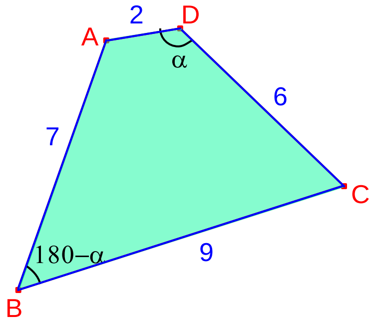

AB=2
DH=AH=1
Els triangles ELH, HDG, FPG són iguals

GP=HL=DJ=x
AL=1-x

[Groga]=2·x+2(1-x)=2
[ABCD]=4

[Groga]/[ABCD]=1/2

3845.- Calculeu l’àrea del quadrilàter convex $ABCD$ de costats $\overline{AB}=7, \overline{BC}=9, \overline{CD}=6, \overline{AD}=2$ i dos angles oposats suplementaris.




Solució:

Aplicant el teorema del cosinus als triangles $\overset{\Delta}{ACD}, \overset{\Delta}{ACB}$:

$\overline{AC}^2 = 4 + 36 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \cos\alpha$

$\overline{AC}^2 = 49 + 81 + 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos\alpha$

Restant ambdues expressions:

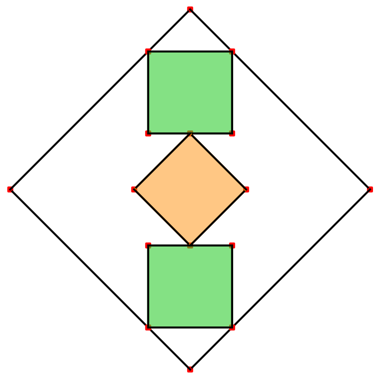
$90 + 150 \cdot \cos\alpha = 0$

$\cos\alpha = -\frac{3}{5}, \sin\alpha = \frac{4}{5}$

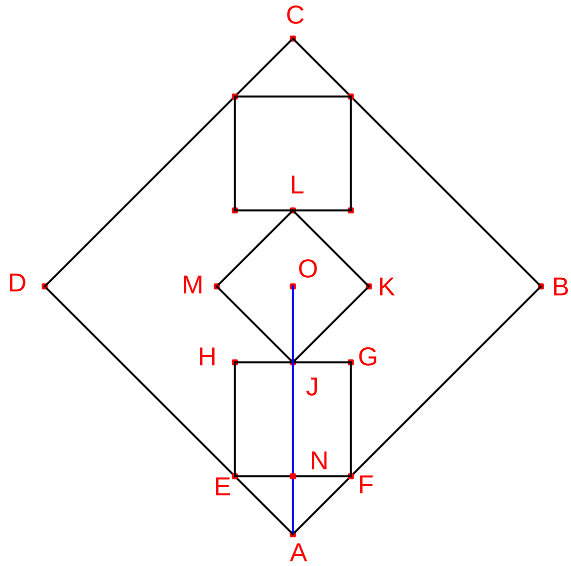
L’àrea del quadrilàter ABCD és:

$S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 9 \cdot \sin\alpha = 30$

3846.- La figura està formada per quatre quadrats, dos d'ells (verds) iguals.
Calculeu la proporció mínima de l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre $O$ i costat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrat $EFGH$ de costat $\overline{EF} = c$
Siga el quadrat $JKLM$ de costat $\overline{JK} = d$




Siga $N$ el punt mig del costat $\overline{EF}$

$$\overline{OJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}d, \overline{AN} = \frac{1}{2}c$$

$$\overline{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}c + \frac{\sqrt{2}}{2}d$$

$$c = \frac{\sqrt{2}}{3}(1-d)$$

La proporció d'àrees és:

$$P = \frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{2c^2 + d^2}{1^2} = \frac{13}{9}d^2 - \frac{8}{9}d + \frac{4}{9}$$

$$= \frac{13}{9}\left(d - \frac{4}{13}\right)^2 + \frac{4}{13}$$

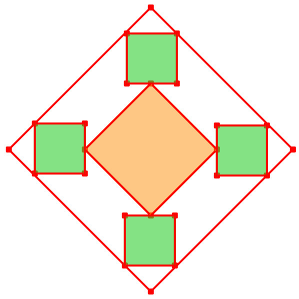
La proporció mínima és:

$$P_{mín} = \frac{4}{13}$$

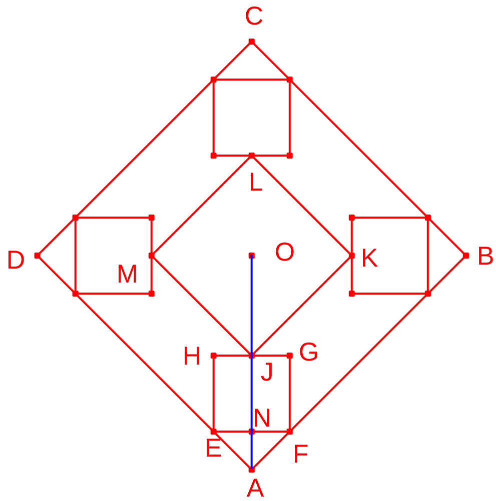
S'assoleix quan $d = \frac{4}{13}$

$$c = \frac{3\sqrt{2}}{13}$$

3847.- La figura està formada per sis quadrats, quatre d'ells (verds) iguals.
Calculeu la proporció mínima de l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre $O$ i costat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrat $EFGH$ de costat $\overline{EF} = c$
Siga el quadrat $JKLM$ de costat $\overline{JK} = d$




Siga $N$ el punt mig del costat $\overline{EF}$

$$\overline{OJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}d, \overline{AN} = \frac{1}{2}c$$

$$\overline{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}c + \frac{\sqrt{2}}{2}d$$

$$c = \frac{\sqrt{2}}{3}(1-d)$$

La proporció d'àrees és:

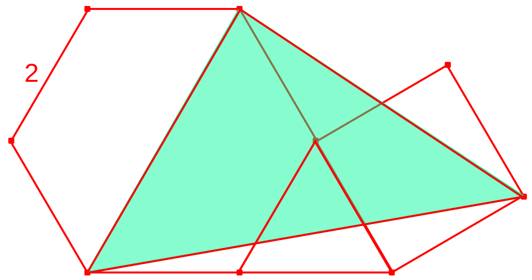
$$P = \frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{4c^2 + d^2}{1^2} = \frac{17}{9}d^2 - \frac{16}{9}d + \frac{8}{9} = \frac{17}{9}\left(d - \frac{8}{17}\right)^2 + \frac{8}{17}$$

La proporció mínima és:

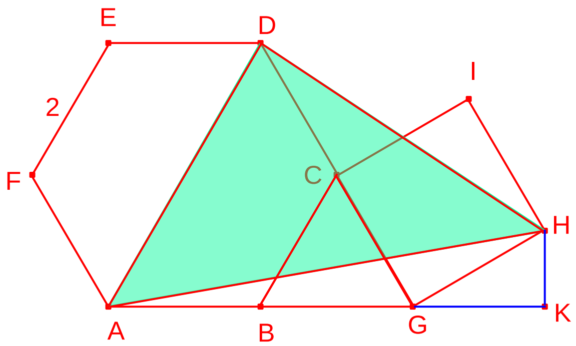
$$P_{mín} = \frac{8}{17}$$

S'assoleix quan $d = \frac{8}{17}$

3848.- La figura està formada per un hexàgon regular, un triangle equilàter i un quadrat de costats 2
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.




Solució 1:
Siguen l'hexàgon regular $ABCDEF$, el triangle equilàter $\overset{\Delta}{BCG}$ i el quadrat $CGHI$ de costat $\overline{AB}=2$




$\overline{AD}=4$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DGH}$:
$\overline{DH}=2\sqrt{5}$

$\overline{GK}=\sqrt{3}, \overline{HK}=1.$

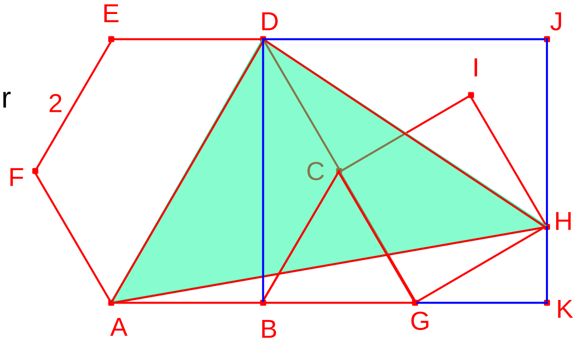
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DGH}$:
$\overline{AH}=2\sqrt{5+2\sqrt{3}}$

Aplicant la fórmula d'Heró per a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADH}$:

$$S=\frac{\sqrt{\left(4+2\sqrt{5}+2\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)\left(-4+2\sqrt{5}+2\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)\left(4-2\sqrt{5}+2\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)\left(4+2\sqrt{5}-2\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)}}{4}$$

$$S=\sqrt{52+16\sqrt{3}}=2+4\sqrt{3}\approx 8.9282$$

Solució 2:
Siguen l'hexàgon regular $ABCDEF$, el triangle equilàter $\overset{\Delta}{BCG}$ i el quadrat $CGHI$ de costat $\overline{AB}=2$




$\overline{AD}=4$

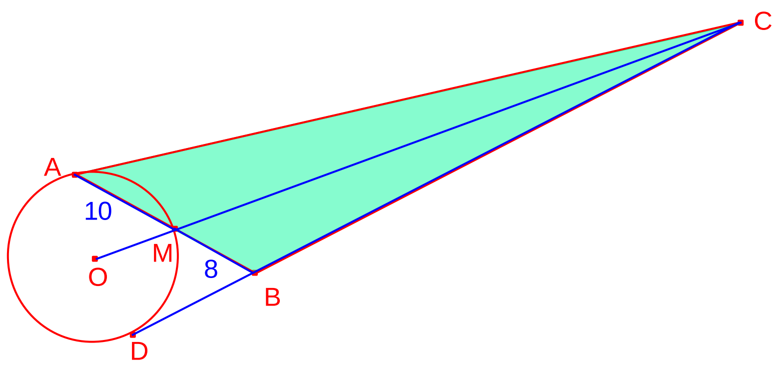
$\overline{BD}=\overline{JK}=2\sqrt{3}, \overline{GK}=\sqrt{3}, \overline{HK}=1, \overline{JH}=2\sqrt{3}-1$
$\overline{DJ}=\overline{BK}=2+\sqrt{3}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADH}$ és igual a l'àrea del trapezi rectangle $AKJD$ menys la suma de les àrees dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKH}, \overset{\Delta}{DJH}$

$$S_{ADH}=S_{AKJD}-\left(S_{AKH}+S_{DJH}\right)=\frac{6+2\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{3})-\left(\frac{4+\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{3}(2\sqrt{3}-1)}{2}\right)$$

$$S_{ADH}=2+4\sqrt{3}\approx 8.9282$$

3849.- En la figura, els segments $\overline{AC}, \overline{BD}$ són tangents a la circumferència.
Siga $M$ la intersecció de $\overline{OC}$ i la circumferència.
Siga $\overline{AM} = 10, \overline{BM} = 8$.

Calculeu la mesura del segment $\overline{AC}$ i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

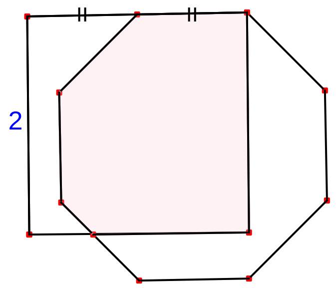



Solució:
Siga $a = \overline{AC} = \overline{BD}$
Siga $\overline{BD} = b$
$\overline{BC} = a - b$

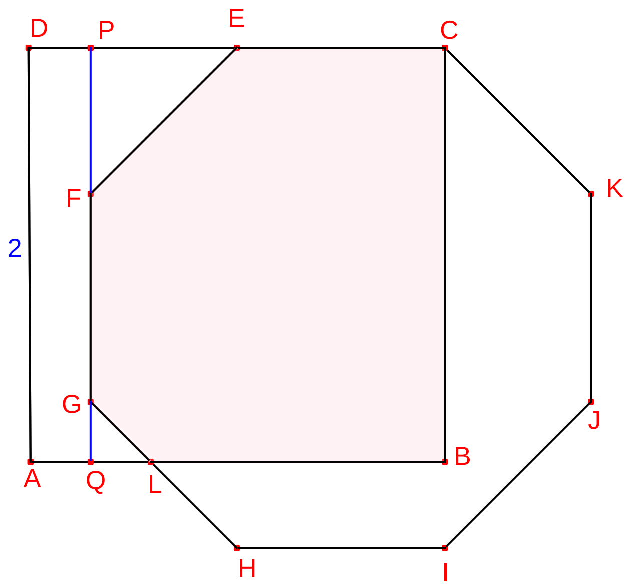
$\overline{OC}$ és bisectriu del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
Aplicant la propietat de la bisectriu:
$$\frac{10}{a} = \frac{8}{a-b} = \frac{2}{b}$$
Aplicant la potència del punt $B$ respecte de la circumferència:
$8 \cdot 18 = b^2$
$b = 12$
$a = \overline{AC} = 60$
$\overline{BC} = 60 - 12 = 48$

Aplicant la fórmula d'Heró de l'àrea al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{126 \cdot 90 \cdot 30 \cdot 8}}{4} = 270\sqrt{7}$$

3850.- La figura està formada per un quadrat de costat 2 i u octògon regular.
Calculeu l'àrea de la intersecció.




Solució:




Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2$
Siga l'octògon regular $CEFGHIJK$ de costat $\overline{CE} = 1$

$\overline{PF} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{GQ} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \overline{PC} =$

L'àrea de l'hexàgon ombrejat $BCEFGL$ és:

$$S_{BCEFGL} = S_{QBCP} - S_{FPE} - S_{GQL} = 2\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{2}$$