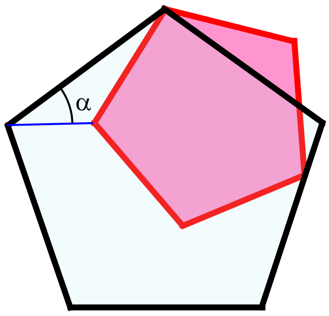
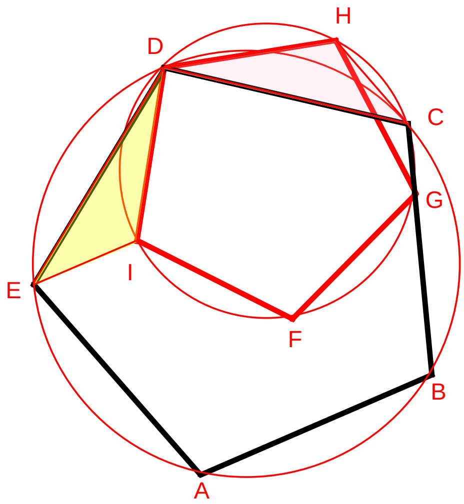
Problemes de Geometria per a l'ESO 387

3861.- La figura està formada per dos pentàgons regulars.
Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:



pentàgon regular ABCDE

pentàgon regular FGHDI

AngleEDI=AngleCDH

Els triangles DEI, DCH són iguals

AngleHGC=AngleCDH

C pertany a la circumferència circumscrita FGHDI

AngleDCH=AngleDGH=36º

Angle DEI=AngleDCH=36º

3862.- En els costats $\overline{CA}$ i $\overline{CB}$ d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ s'agafen els punts M, N tal que

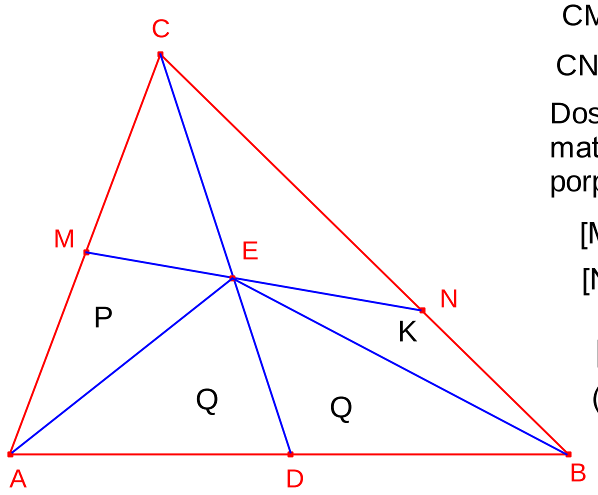
$$\frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = m, \frac{\overline{CN}}{\overline{CB}} = n$$

La mitjana $\overline{CD}$ talla $\overline{MN}$ en E. Calculeu la raó:

$$\frac{\overline{ME}}{\overline{NE}}$$

Proposta de Mario Mestre.

Solució:



CM=bm, AM=(1-m)b

CN=an, BN=(1-n)a

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són porporcionals a les bases

[MEC]=m/(1-m)·P

[NEC]=n/(1-n)·K

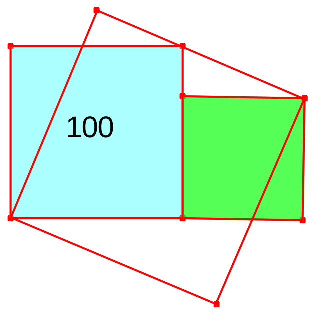
[ADC]=[BDC]

(1+m/(1-m))·P=(1+n/(1-n))·K

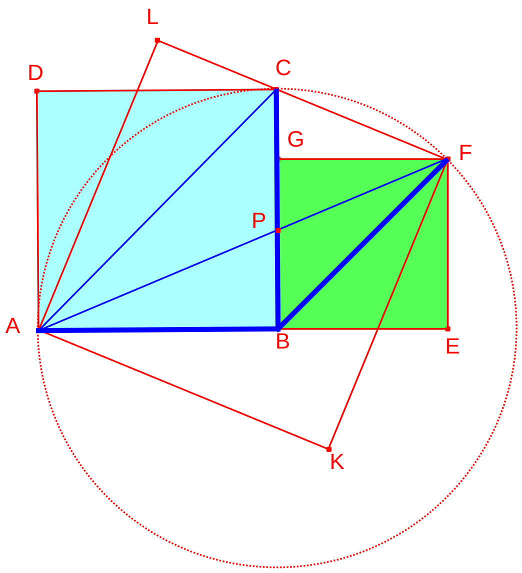
P/K=(1-m)/(1-n)

ME/EN=[MEC]/[NEC]=(m/(1-m))P/(n/(1-n))K=m/n

3863.- La figura està formada per tres quadrats.
El quadrat blau té àrea 100.
Calculeu l'àrea del triangle verd.



Solució:



[ABCD]=100

Angle EAK=angleKFE=Angle GFC

Angle AFB=AngleKFE

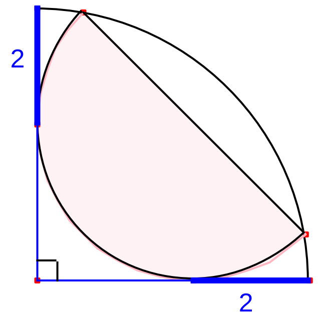
Angle AFC=45º

F pertany a la circumferència de centre B i radi BA

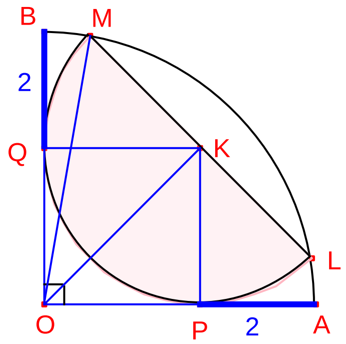
BF=AB=10

[BEFG]=BF²/2=50

3864.- La figura està formada per un quadrat i un semicercle.
Calculeu l'àrea del semicercle.



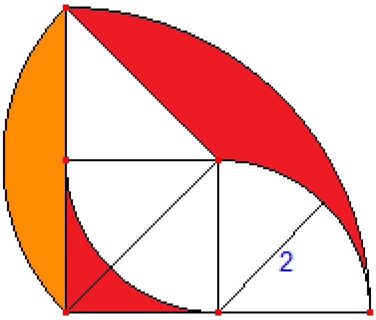
Solució:
Siga el semicercle de centre K i radi $\overline{KL} = \overline{KP} = r$
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OM} = 2 + r$

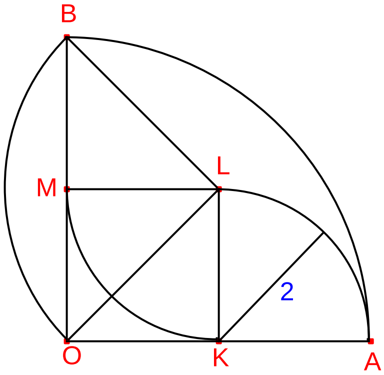


$\overline{OK} = r\sqrt{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKM}$:
$(2 + r)^2 = r^2 + 2r^2$
$r^2 - 2r - 2 = 0$
$r = 1 + \sqrt{3}$
L'àrea del semicercle és:
$S_K = \frac{1}{2}\pi\left(1 + \sqrt{3}\right)^2 = \pi\left(2 + \sqrt{3}\right) \approx 11.7246$

3865.- La figura està formada per quatre quadrants.
Calculeu la diferència entre l'àrea roja i l'àrea groga.





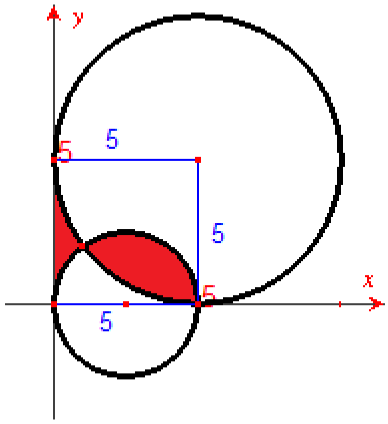
Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = 4$
Siga el quadrant de centre K i radi $\overline{KA} = 2$
Siga el quadrant de centre L i radi $\overline{LM} = 2$
Siga el quadrant de centre L i radi $\overline{LO} = 2\sqrt{2}$

L'àrea del segment circular groc és:
$$S_{groc} = \frac{\pi}{4}\left(2\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 2\pi - 4$$

L'àrea roja és igual a l'àrea del quadrant de centre O i radi 4, menys l'àrea d'un semicercle de radi 2, menys l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{MLB}$:
$$S_{roja} = \frac{1}{2}\pi 4^2 - \frac{1}{2}\pi 2^2 - \frac{1}{2}2^2 = 2\pi - 2$$

La diferència entre les àrees és:
$$S_{roja} - S_{groga} = 2$$

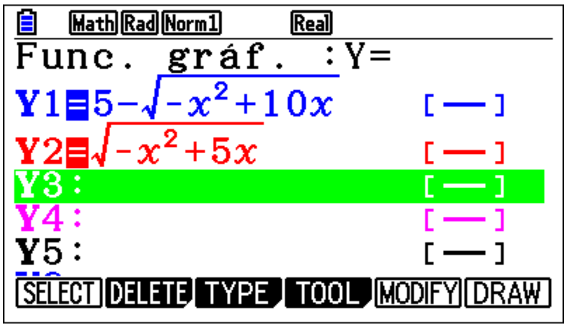
3866.- Calculeu l’àrea ombrejada de la figura.

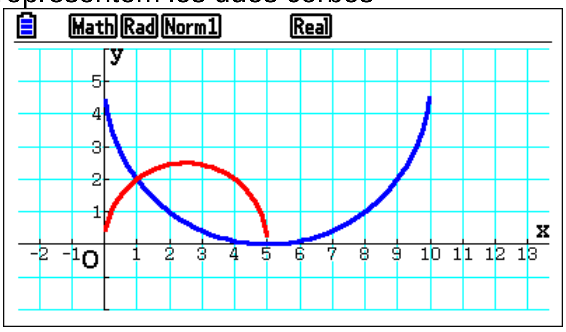


Solució 1:
L’equació de la circumferència de centre $O(5,5)$ i radi 5 és:
$(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
La semicircumferència inferior té per equació:
$y=5-\sqrt{-x^2+10}$

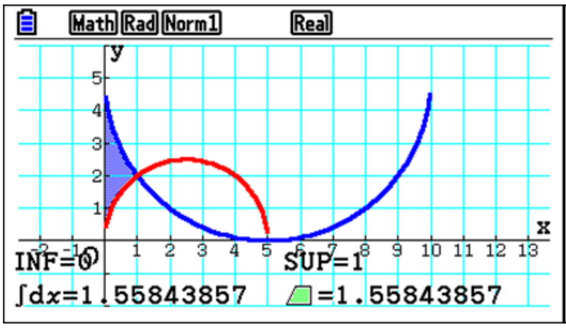
L’equació de la circumferència de centre $P\left(\frac{5}{2},0\right)$ i radi $\frac{5}{2}$
$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$
La semicircumferència superior té per equació:
$y=\sqrt{-x^2+5x}$

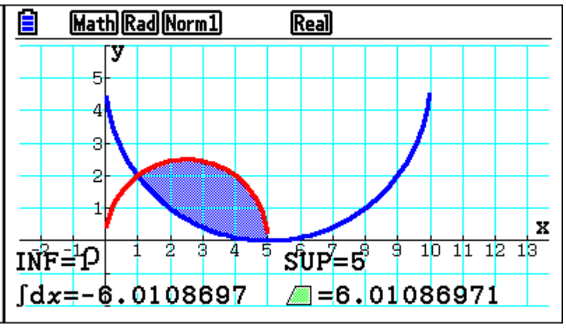
Definim les funcions semicircumferències i representem les dues corbes





Amb la funció G-Solv calculeu les dues àrees.





L’àrea ombrejada és:
$S\approx 7.5693$

Solució 2:

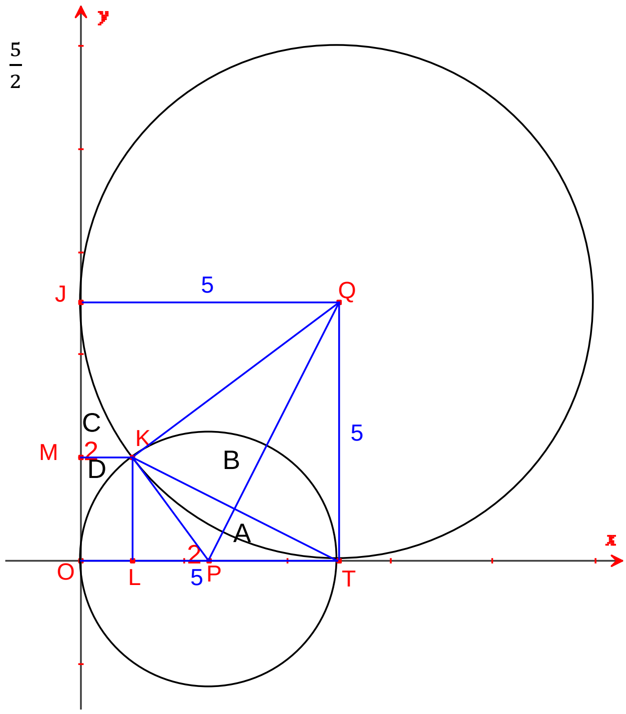
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PO} = \overline{PT} = \frac{5}{2}$

Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QT} = 5$

Siga K la intersecció de les dues circumferències.

Siga L la projecció de K sobre $\overline{OT}$

Siga M la projecció de K sobre $\overline{OJ}$



Siga $\alpha = \angle KTL = \angle TQP$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$\angle KQT = 2\alpha, \angle LPK = 2\alpha$

$$\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$$

Siga $\overline{LP} = x$

$$\overline{KL} = \frac{1}{2}\overline{LT} = \frac{a + \frac{5}{2}}{2} = \frac{2a+5}{4}$$

aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLP}$:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{2a+5}{4}\right)^2$$

Resolent l'equació:

$a = 1$

$\overline{KL} = 2, \overline{JM} = 3, \overline{MK} = 1$

Hem dividit la superfície ombrejada en quatre parts A, B, C, D.

$$A = \frac{\arcsin\frac{4}{5}}{2}5^2 - \frac{1}{2}5^2\frac{4}{5}$$

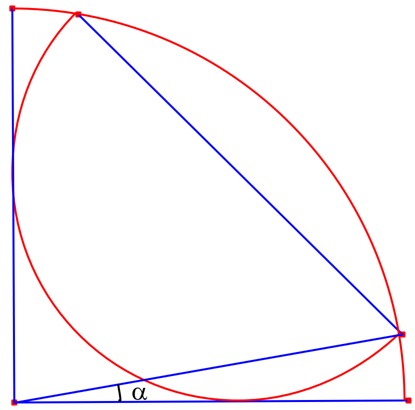
$$B = \frac{\pi - \arcsin\frac{4}{5}}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2\frac{4}{5}$$

$$C = \frac{5+1}{2}\cdot 3 - \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{4}{5}}{2}5^2$$

$$D = \frac{\frac{5}{2}+1}{2}\cdot 2 - \frac{\arcsin\frac{4}{5}}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

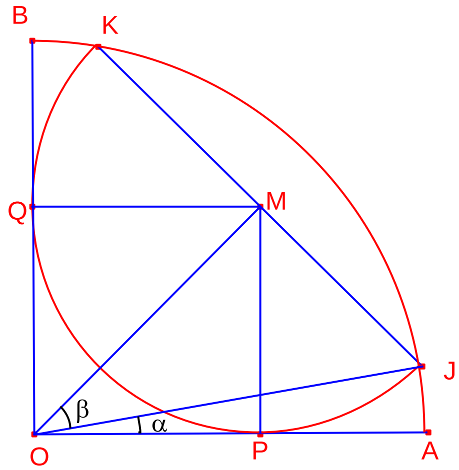
$$A + B + C + D = -\frac{25\pi}{8} + \frac{75}{4}\arcsin\frac{4}{5} \approx 7.5693$$

3867.- La figura està formada per un quadrant i un semicercle tangents als radis del quadrant.
Calculeu $\tan\alpha$

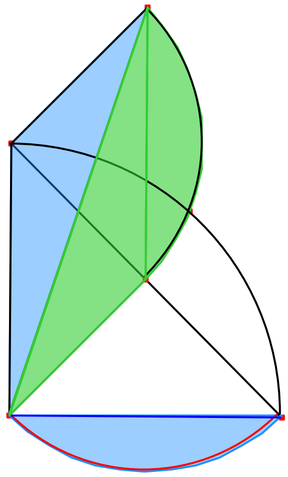


Solució:
Siga el quadrant de centre O.
Siga el semicercle de centre M i radi $\overline{MJ} = \overline{MP} = \overline{MQ} = r$
Siga $\beta = \angle MOJ$
$\alpha + \beta = 45°$
$\overline{OM} = r\sqrt{2}$
$\tan\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

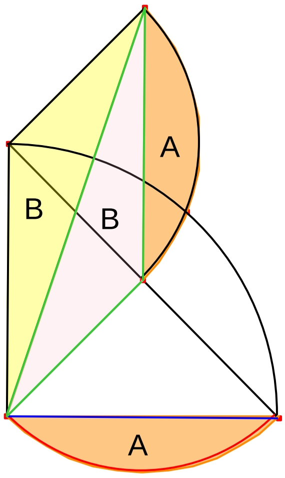
$$\tan\alpha = \tan(45° - \beta) = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$$



3868.- En la figura, calculeu la proporció entre l'àrea blava i la verda.

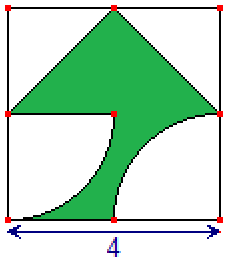


Solució:

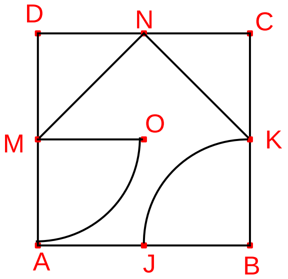


$$\frac{S_{Blava}}{S_{Verda}} = 1$$

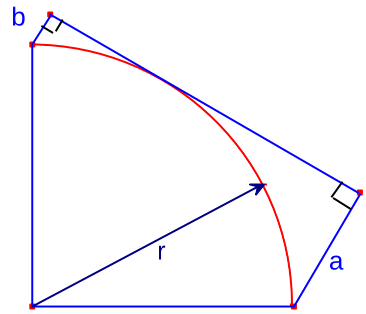
3869.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat de costat 4.



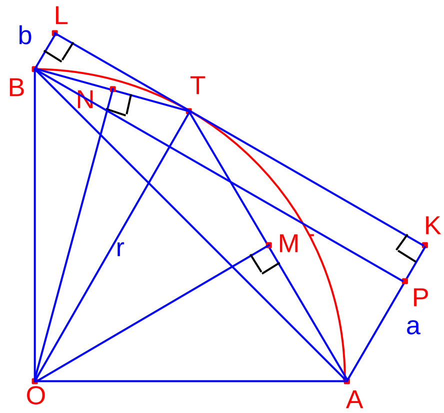
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 4$
L'àrea ombrejada és igual al tres quartes parts de l'àrea del quadrat menys l'àrea d'un semicercle de radi 2:
$S = \frac{3}{4}4^2 - \frac{1}{2}\pi 2^2 = 12 - 2\pi \approx 5.7168$



3870.- Donat el quadrant de radi r, proveu que:
$r = a + b + \sqrt{2ab}$



Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OT} = r$.
Siguen $\overline{AK} = a, \overline{BL} = b$
Siguen M, N els punts migs delssegments $\overline{AT}, \overline{BT}$, respectivament.
Siguen $\overline{AM} = x, \overline{Nn} = y$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{TKA}, \overset{\Delta}{OMA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{x}{r} = \frac{a}{2x}$
$2x^2 = ar$
Anàlogament:
$2y^2 = br$

Siga P la projecció de B sobre $\overline{AK}$.
$\overline{AP} = a - b, \overline{AB} = r\sqrt{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APB}$:
$\overline{BP}^2 = 2r^2 - (a-b)^2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKT}$:
$\overline{AT} = \sqrt{4x^2 - a^2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BLT}$:
$\overline{BT} = \sqrt{4y^2 - b^2}$

$\sqrt{2r^2 - (a-b)^2} = \sqrt{4x^2 - a^2} + \sqrt{4y^2 - b^2}$
$\sqrt{2r^2 - (a-b)^2} = \sqrt{2ar - a^2} + \sqrt{2br - b^2}$
Elevant al quadrat:
$r^2 + ab - r(a+b) = \sqrt{(2ar - a^2)(2br - b^2)}$
Elevant al quadrat:
$r^2 - 2(a+b)r + (a^2 + b^2) = 0$
Resolent l'equació:
$r = a + b + \sqrt{2ab}$