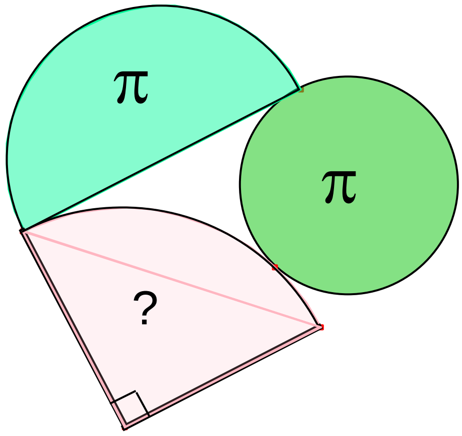
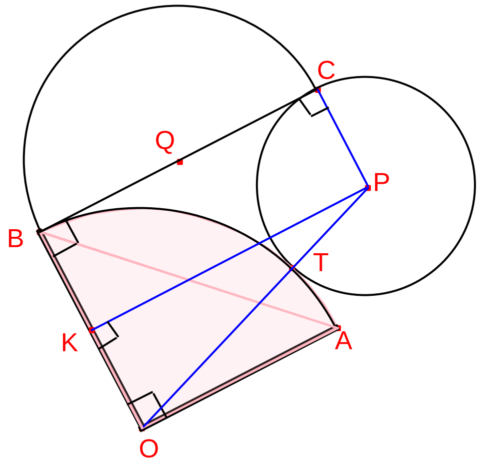
3871.- La figura està formada per un cercle, un semicercle i un quadrant.
Les àrees del cercle i del semicercle són iguals a π



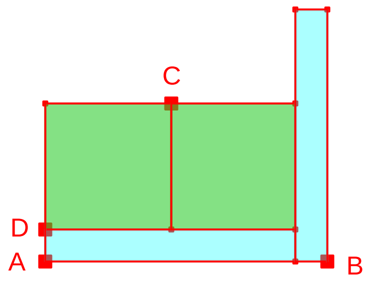
Solució:
Siga el cercle de centre P i radi $\overline{PC} = \overline{PC} = r$
$\pi r^2 = \pi$
$r = 1$
Siga el semicercle de centre Q i radi $\overline{QB} = s$
$\frac{1}{2}\pi s^2 = \pi$
$s = \sqrt{2}$



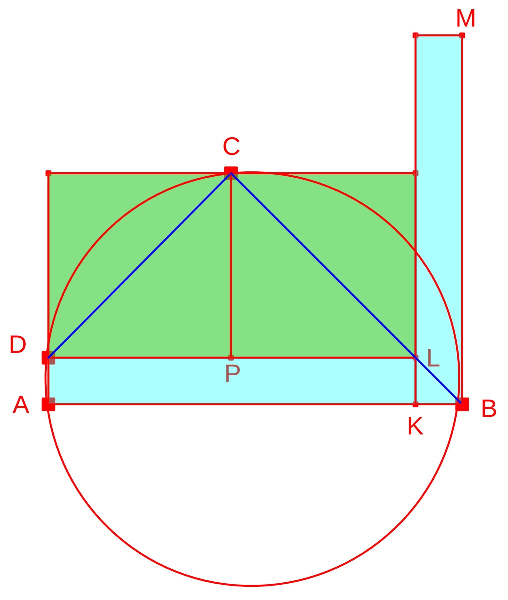
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OB} = \overline{OT} = R$
Siga K la projecció de P sobre $\overline{OB}$
$\overline{OK} = R - r, \overline{OP} = R + r, \overline{PQ} = 2s$

Aplicant el teoema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKP}$:
$(R + r)^2 = (R - r)^2 + 4s^2$
$(R + 1)^2 = (R - 1)^2 + 8$
$R = 2$
L'àrea del quadrant és:
$S_{quadrant} = \frac{1}{4}\pi R^2 = \pi$

3872.- La figura està formada per dos rectangles iguals i dos quadrats iguals.
Proveu que els punts A, B, C, D pertanyen a una circumferència.



Solució:



AD=KB, AK=BM

AngleCLP=AngleKLB=45º, Angle PLK=90º

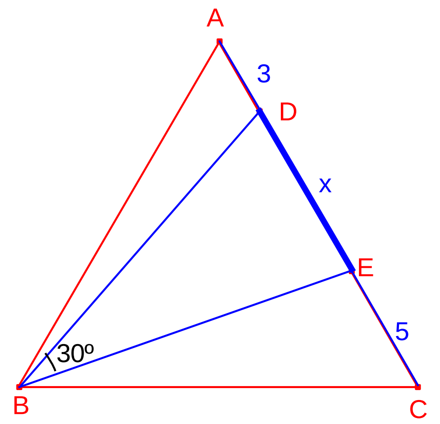
C, L, B alineats

AngleKBL=45º
AngleADC=135º

Angles suplementaris

A, B, C, D cíclic

3873.- Donat el triangle equilàter, calculeu la mesura del segment x



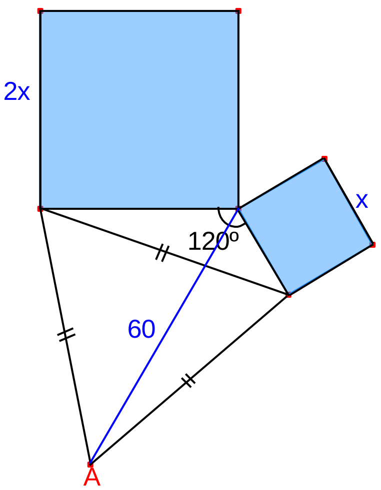
Solució:

Aplicant el teorema del cosinus all triangle $\overset{\Delta}{BCE}$:
$\overline{BE}^2 = 5^2 + (8+x)^2 - 5(8+x)$

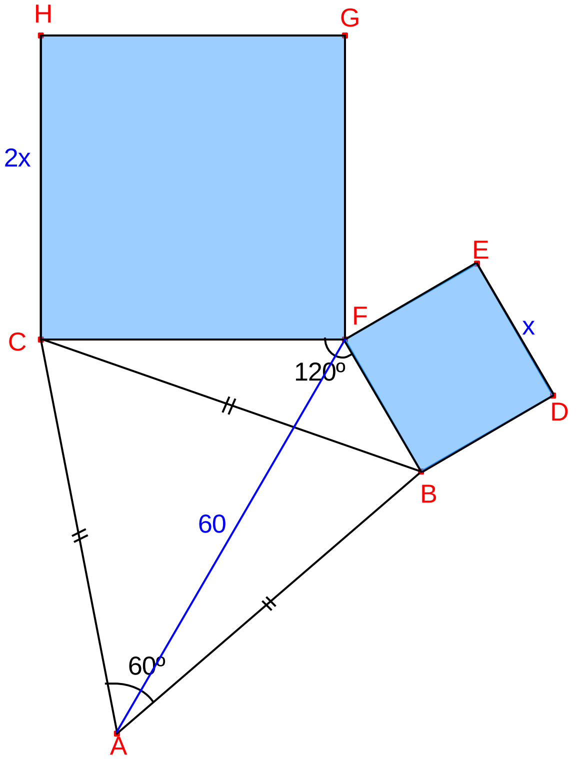
Aplicant el teorema del cosinus all triangle $\overset{\Delta}{BAD}$:
$\overline{BD}^2 = 3^2 + (8+x)^2 - 3(8+x)$

Aplicant el teorema del cosinus all triangle $\overset{\Delta}{BDE}$:
$x^2 = 49 + 11x + x^2 + 49 + 13x + x^2 - \sqrt{3}\left(\sqrt{49+11x+x^2}\cdot\sqrt{49+13x+x^2}\right)$
$\sqrt{3}\left(\sqrt{49+11x+x^2}\cdot\sqrt{49+13x+x^2}\right) = x^2 + 24x + 98$
Elevant al quadrat i simplificant:
$2x^4 + 24x^3 - 49x^2 - 1176x - 2401 = 0$
resolent l'equació:
$x = 7$

3874.- En la figura, calculeu la suma de l'àrea dels dos quadrats.



Solució:



ABFC inscriptible, angles suplementaris

AB=c

Teorema Tolomeu

xc+2xc=60c

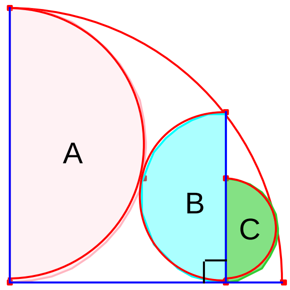
3x=60

x=20

[Blau]=$5x^2$=2000

3875.- En un quadrant s'han dibuixat tres semicercles d'àrees A, B, C

Calculeu $A : B : C$



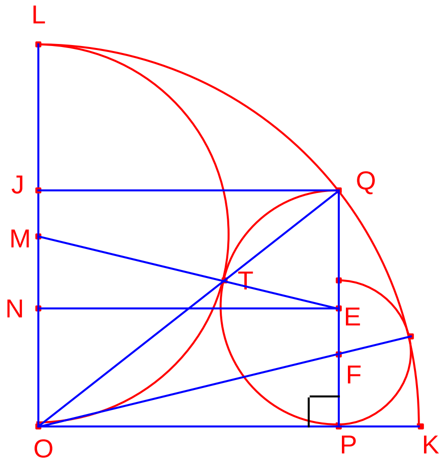
Solució:

Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OK} = 1$

Siga el semicercle de centre M i diàmetre $\overline{OL} = 1$

L'àrea del semicercle de diàmetre és:$\overline{OL}$ és

$A = \pi \frac{1}{8}$



Siga el semicercle de centre E i diàmetre $\overline{PQ} = 2r$.

Siga J la projecció de Q sobre $\overline{OL}$

Siga N la projecció de E sobre $\overline{OL}$

Siga $\overline{JQ} = x, \overline{MN} = \frac{1}{2} - r, \overline{ME} = \frac{1}{2} + r$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{OJQ}, \overset{\Delta}{MNE}$:

$x^2 + 4r^2 = 1, 2r = x^2$

Resolent el sistema:

$r = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{\Phi}, x^2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi}$

L'àrea del semicercle de diàmetre és:$\overline{PQ}$ és

$B = \pi \frac{1}{8}\frac{1}{\Phi^2}$

Siga el semicercle de centre F i radi $\overline{FP} = s$

$\overline{OF} = 1 - s, \overline{OP} = x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPF}$:

$(1 - s)^2 = x^2 + s^2$

$2s = 1 - x^2$

$2s = 1 - \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi^2}$

$s = \frac{1}{2}\frac{1}{\Phi^2}$

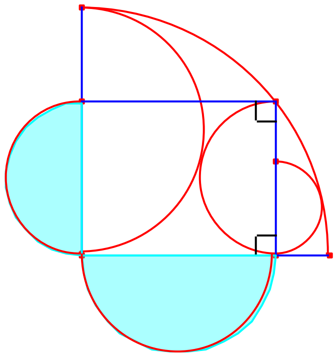
L'àrea del semicercle de radi és:$\overline{FP}$ és

$C = \frac{1}{8}\pi \frac{1}{\Phi^4}$

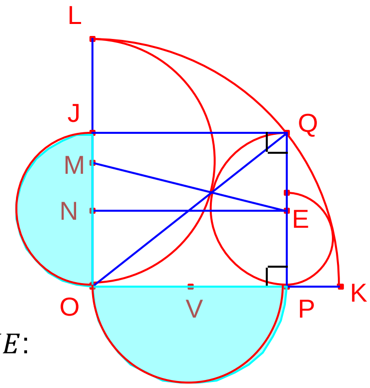
Aleshores:

$A : B : C = \Phi^4 : \Phi^2 : 1$

3876.- La figura està formada per un quadrant i cinc semicercles.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total.



Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OK} = 1$
Siga el semicercle de centre M i diàmetre $\overline{OL} = 1$



Siga el semicercle de centre E i diàmetre $\overline{PQ} = 2r$.
Siga J la projecció de Q sobre $\overline{OL}$
Siga N la projecció de E sobre $\overline{OL}$
Siga el semicercle de centre N i diàmetre $\overline{OJ} = 2r$.

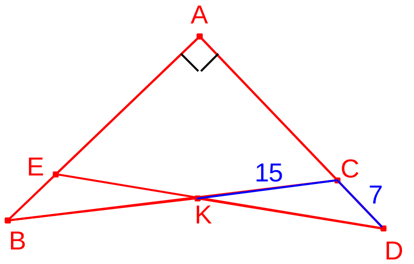
Siga $\overline{JQ} = x, \overline{MN} = \frac{1}{2} - r, \overline{ME} = \frac{1}{2} + r$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{OJQ}, \overset{\Delta}{MNE}$:
$x^2 + 4r^2 = 1, 2r = x^2$
Resolent el sistema:
$$r = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{\Phi}, x^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi}$$
Siga V el punt mig del segment $\overline{OP} = x$
Siga el semicercle de centre V i diàmetre $\overline{OP} = x$.
L'àrea blava és:
$$S_{blava} = \frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\pi x^2 = \frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi}\right) = \frac{\pi}{8}$$
L'àrea total és:
$$S_{Total} = S_{blava} + \frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{blava}}{S_{Total}} = \frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{3\pi}{8}} = \frac{1}{3}$$

3877.- En la figura, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{ADE}$ són iguals.

$\overline{CD} = 7, \overline{CK} = 15$

Calculeu l'àrea total de la figura.



Solució:

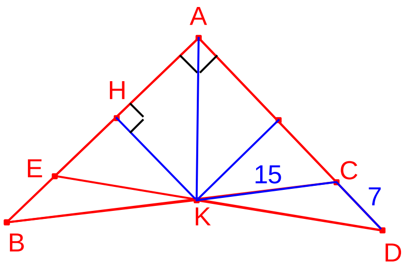
Siga H la projecció de K sobre $\overline{AB}$

Siga $\overline{KH} = \overline{AH} = h$

Siga $\overline{EH} = x$

$\overline{AC} = x + h$

$\overline{AB} = 7 + x + h, \overline{AC} = x + h$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EHK}$:

$h^2 + x^2 = 15^2$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{HDK}$ són semblants.

aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{h + x}{h} = \frac{7 + x + h}{7 + x}$$

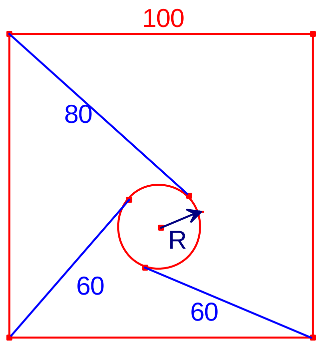
Resolent el sistema format per les dues equacions:

$h = 12, x = 9$

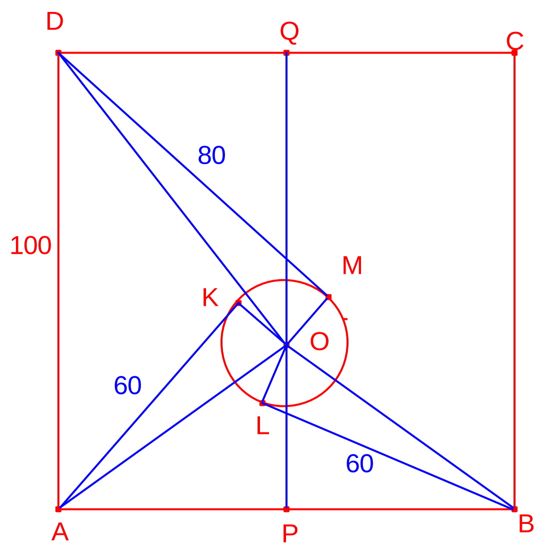
L'àrea del quadrilàter $ABKD$ és:

$S_{ABKD} = \overline{AB} \cdot h = (7 + 9 + 12)9 = 336$

3878.- Dins d'un quadrat de costat 100 hi ha una circumferència de radi R.
Des de tres vèrtexs s'han traçat tres tangents a la circumferència.
Els segments de tangència mesuren 60, 60 i 80
Calculeu la mesura del radi de la circumferència.



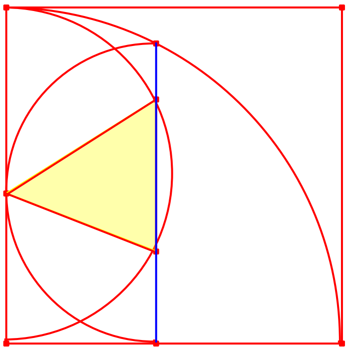
Solució:



Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 100$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OK} = \overline{OL} = \overline{OM} = R$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKO}, \overset{\Delta}{BLO}$ són iguals.
aleshores, $\overline{OA} = \overline{OB}$
Per tant, O pertany a la mediatriu del costat $\overline{AB}$
Siguen P, Q els punts migs dels costat $\overline{AB}, \overline{CD}$
Siga $\overline{OP} = x$

Aplicant el teorema de Piàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DMO}$:
$\overline{OA}^2 = R^2 + 60^2$
Aplicant el teorema de Piàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKO}$:
$\overline{OD}^2 = R^2 + 80^2$
Aplicant el teorema de Piàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APO}$:
$\overline{OA}^2 = R^2 + 60^2$
$R^2 + 60^2 = 50^2 + x^2$
Aplicant el teorema de Piàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DQO}$:
$R^2 + 80^2 = 50^2 + (100 - x)^2$
Resolent el sistema:
$R = 14, x = 36$

3879.- La figura està formada per un quadrat, un quadrant i dos semicercles.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrant de centre A i radi $\overline{AB} = 1$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$
siga el semicercle de centre M i diàmetre $\overline{AD}$
Siga el semicercle de centre S i radi $\overline{SP} = \overline{SQ} = \overline{SJ} = r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APQ}$:

$1 = r^2 + 4r^2$

$r = \frac{\sqrt{5}}{5}$

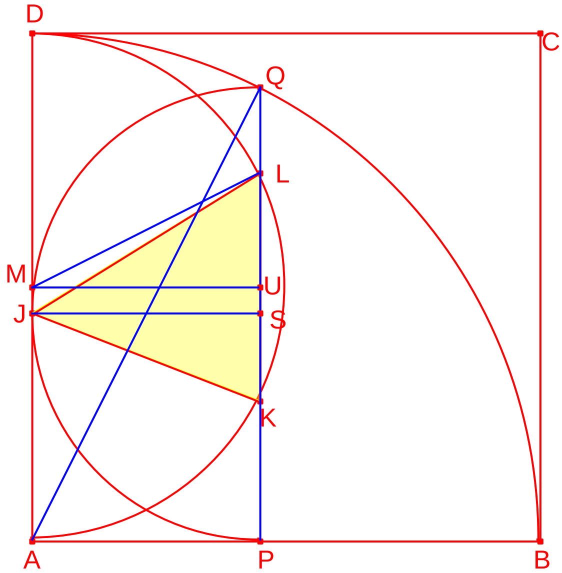
Siga U el punt mig segment $\overline{KL}$
Siga $a = \overline{UL} = \overline{UK}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MUL}$:

$\frac{1}{4} = a^2 + r^2$

$a = \frac{\sqrt{5}}{10}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{JKL}$ és:

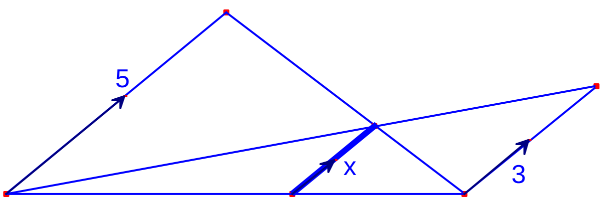
$S_{JKL} = \frac{1}{2} 2a \cdot r = \frac{\sqrt{5}}{10} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{10}$



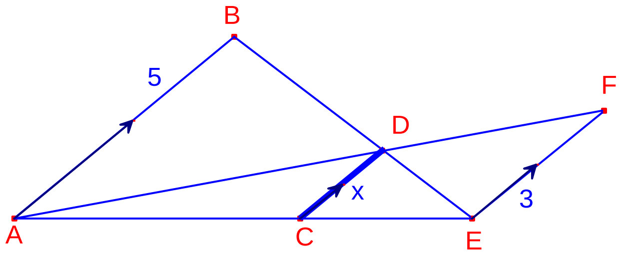
La proporció d'àrees és:

$\frac{S_{JKL}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{10}$

3880.- La figura està formada per tres segments paral·lels de longituds $5, x, 3$
Calculeu la mesura del segment x



Solució:



Siguen els segments paral·lels $\overline{AB} = 5, \overline{CD} = x, \overline{EF} = 3$
Siguen $\overline{AC} = r, \overline{CE} = s$

Els triangles $\overset{\Delta}{A}EB, \overset{\Delta}{C}ED$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{x}{5} = \frac{s}{r+s}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{A}EF, \overset{\Delta}{A}CD$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{x}{3} = \frac{r}{r+s}$$

Sumant ambdues expressions:
$$\frac{x}{5} + \frac{x}{3} = 1$$
$$x = \frac{15}{8}$$

Generalització:
Si la figura està formada per tres segments paral·lels de longituds a, x, b
$$x = \frac{ab}{a+b}$$