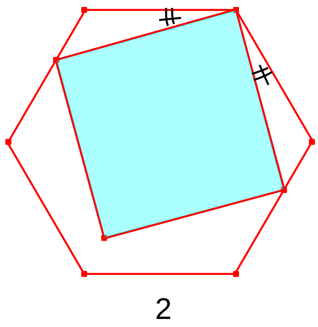
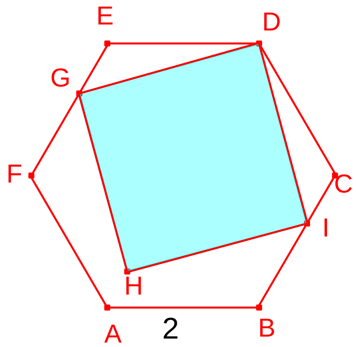
Problemes de Geometria per a l'ESO 389

3881.- La figura està formada per un hexàgon regular de costat 2 i un quadrat.
Calculeu l'àrea del quadrat.



Solució:



DG=c

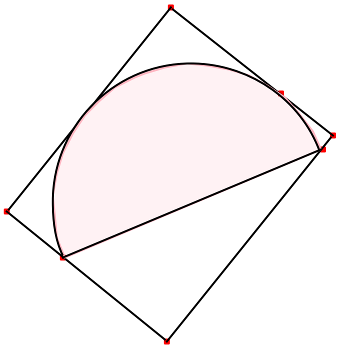
angleEGD=45º
Teorema dels sinus al triangle DEG

2/sin120º=c/sin45º

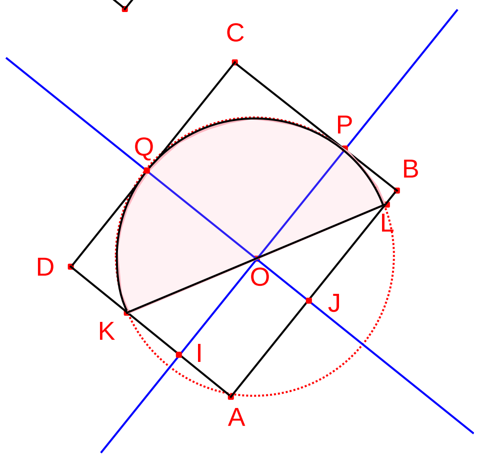
c=sqrt(6)

[DGHI]=6

3882.- Un semicercle està inscrit en un rectangle.
Siga la fracció entre l’àrea del semicercle i l’àrea del rectangle
Calculeu el valor de la màxima fracció.



Solució:
Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{KL} = 2R$
Siga el rectangle $ABCD$.
El vèrtex A pertany a la circumferència de diàmetre $\overline{KL}$
$\overline{OA} = R$
Siga P el punt de tangència del semicercle i el costat $\overline{BC}$
Siga Q el punt de tangència del semicercle i el costat $\overline{CD}$
$\overline{CQ} = \overline{CP} = R$
Siga $\overline{BP} = a, \overline{DQ} = b$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{IOJ}$:
$a^2 + b^2 = R^2$

La proporció d’àrees és:

$$P(a,b) = \frac{\frac{1}{2}\pi R^2}{(a+R)(b+R)}$$

$$P(a,b) = \frac{\pi R^2}{2ab + 2(a+b)R + 2R^2}$$

El valor màxim de la proporció d’àrees s’assoleix en el valor mínim del denominador:

$$f(a,b) = ab + (a+b)R + R^2$$

$$f(a) = a\sqrt{R^2 - a^2} + \left(a + \sqrt{R^2 - a^2}\right)R + R^2$$

$$f(a) = Ra + R^2\sqrt{R^2 - a^2} + \sqrt{R^2a^2 - a^4} + R^4$$

Derivant la funció:

$$f'(a) = R - \frac{Ra}{\sqrt{R^2 - a^2}} + \frac{R^2 - 2a^2}{\sqrt{R^2 - a^2}}$$

$$f'(a) = 0$$

$$R\sqrt{R^2 - a^2} = 2a^2 + Ra - R^2$$

Elevant al quadrat:

$$2a^4 + 2Ra^3 - R^2a^2 - R^3a = 0$$

$$2a^3 + 2Ra^2 - R^2a - R^3 = 0$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

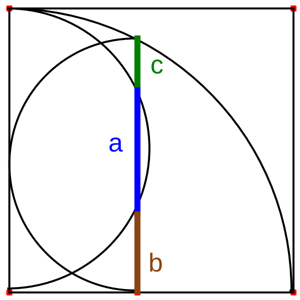
$$b = \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

$$f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right) > 0$$

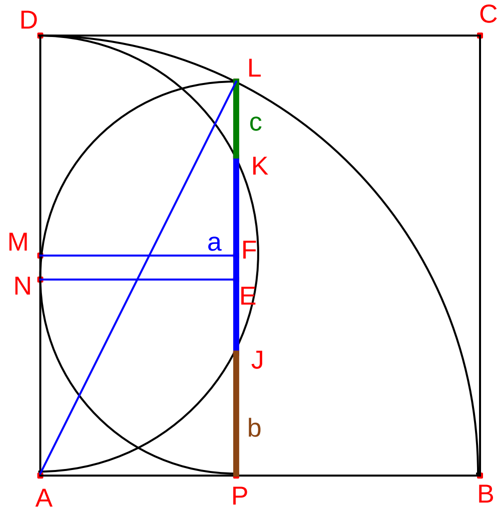
El rectangle $ABCD$ és un quadrat.
La fracció màxima és:

$$P_{màx} = \frac{\frac{1}{2}\pi R^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 R^2} = \frac{\pi}{3 + 2\sqrt{2}} \approx 0.5390$$

3883.- La figura està formada per un quadrat, un quadrant i dos semicercles.
Calculeu $a : b : c$.



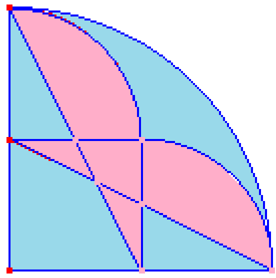
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrant de centre A i radi $\overline{AB} = 1$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$
siga el semicercle de centre M i diàmetre $\overline{AD}$
Siga el semicercle de centre E i radi $\overline{EP} = \overline{EL} = \overline{EN} = r$



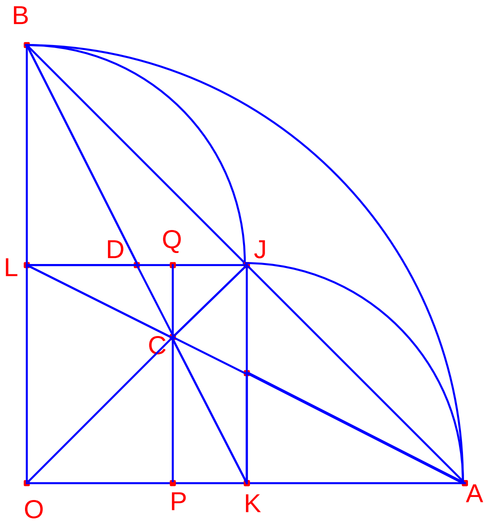
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APQ}$:
$1 = r^2 + 4r^2$
$r = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$
Siga F el punt mig segment $\overline{JK} = a$
Siga $\overline{FJ} = \overline{FK} = \frac{1}{2}a$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MUL}$:
$\dfrac{1}{4} = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + r^2$
$a = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$
$b = \overline{PF} - \overline{FJ} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{10} = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{10}$
$c = \overline{PL} - a - b = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} - \dfrac{\sqrt{5}}{5} - \dfrac{5 - \sqrt{5}}{10} = \dfrac{-5 + 3\sqrt{5}}{10}$

$$a : b : c = \frac{\sqrt{5}}{5} : \frac{5 - \sqrt{5}}{10} : \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{10} = 2 : \sqrt{5} - 1 : 3 - \sqrt{5} = 1 : \frac{1}{\Phi} : \frac{1}{\Phi^2} = \Phi^2 : \Phi : 1$$

3884.- La figura està formada per tres quadrants.
calculeu la proporció entre l'àrea rosa i l'àrea blava.



Solució:



Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = 4$
Siga el quadrant de centre L i radi $\overline{LJ} = \overline{LB} = 2$
Siga C la intersecció dels semgnets $\overline{AL}, \overline{BK}$
Siga P la projecció de C sobre $\overline{OA}$
Siga Q la projecció de C sobre $\overline{LJ}$
Siga D la intersecció de $\overline{LJ}, \overline{BK}$
$\overline{LD} = 1, \overline{DJ} = 1$
Siga $x = \overline{OP}$
$\overline{AP} = 4 - x$

$$\overline{PC} = \frac{1}{2}\overline{AP} = \overline{OP}$$

$$\frac{1}{2}(4 - x) = x$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$\overline{CQ} = \frac{2}{3}$$

L'àrea del segment circular de centre L, 90º i radi 2 és:

$$S_{segment} = \frac{1}{4}\pi 2^2 - \frac{1}{2}2 \cdot 2 = \pi - 2$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCJ}$ és:

$$S_{BCJ} = \frac{1}{2}\overline{DJ} \cdot (\overline{CQ} + \overline{BL}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + 2\right) = \frac{5}{3}$$

L'àrea rosa és:

$$S_{rosa} = 2\left(\pi - 2 + \frac{5}{3}\right) = 2\pi - \frac{2}{3}$$

L'àrea blava és:

$$S_{blava} = \frac{1}{4}\pi 4^2 - S_{rosa} = 2\pi + \frac{2}{3}$$

La proporció d'àrees és:

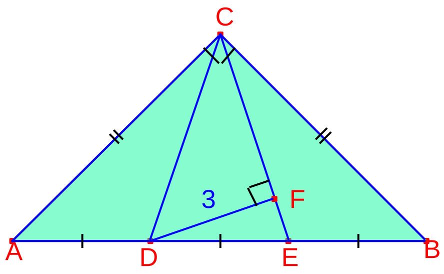
$$\frac{S_{rosa}}{S_{blava}} = \frac{2\pi - \frac{2}{3}}{2\pi + \frac{2}{3}} = \frac{3\pi - 1}{3\pi + 1} \approx 0.8081$$

3885.- Siga el triangle rectangle isòsceles

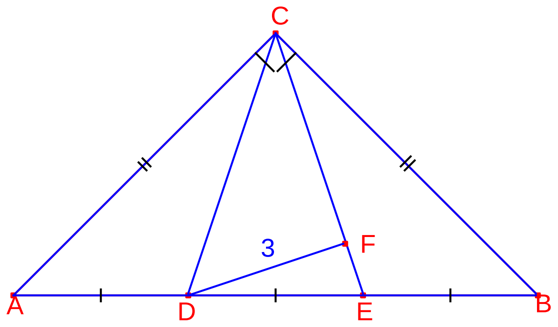
$\overset{\Delta}{ABC}, C = 90°$

La hipotenusa s'ha dividit en tres parts iguals

Calculeu la mesura del segment $\overline{CE}$



Solució:



AC=BC=1 AB=sqrt(2)

x=angleACD=AngleBCE

Teorema sinus EBC

(sqrt(2)/3)/sin x=c/sin(45º+x)

tan x=1/2

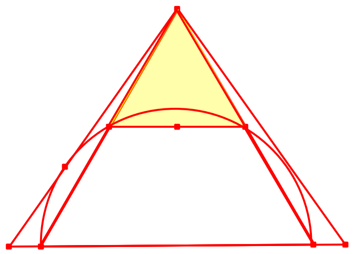
angleDCF=90º-2x, Angle FDE=45º-x

FE=3·tan(45º-x)=1

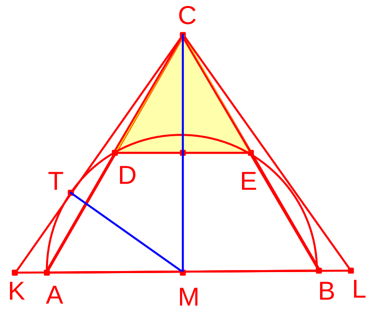
CF=3·cot(2x)=4

CE=5

3886.- Un triangle conté una semicercle i un triangle equilàter. Calculeu la proporció entre les àrees del triangle groc i el triangle exterior



Solució:



El triangle exterior $\overset{\Delta}{KLC}$ és isòsceles.

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 2$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEC}$.

$\overline{DE} = 1$

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$

$\overline{CM} = \sqrt{3}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CTM}$:

$\overline{CT} = \sqrt{2}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{KMC}, \overset{\Delta}{KTM}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{KM}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\overline{KM} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\overline{KL} = \sqrt{6}$$

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEC}$ és

$$S_{DEC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

L'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{KLC}$ és

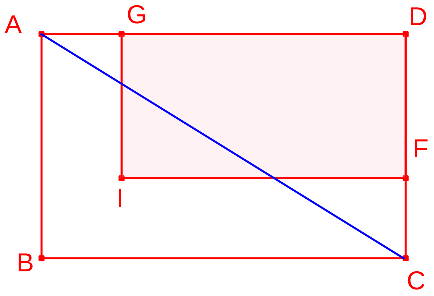
$$S_{KLC} = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

La proporció d'àrees és:

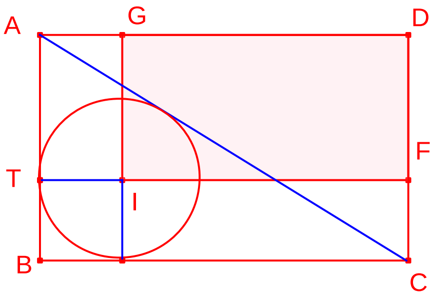
$$\frac{S_{DEC}}{S_{KLC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{12} \approx 02012$$

3887.- Siguen dos rectangles ABCD, EIFD.

Si I és l'incentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, calculeu la proporció entre les àrees dels dos rectangles.



Solució:



IT=r
DE=a, DF=b

r=(AB+BC-AC)/2

2r=a+r+b+r-sqrt((a+r)²+(b+r)²)

a+b=sqrt((a+r)²+(b+r)²)

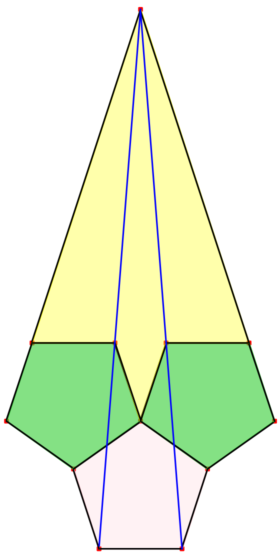
a²+b²+2ab=a²+b²+2r²+2r(a+b)

ab=r²+r(a+b)

[EIFD]=ab
[ABCD]=(a+r)(b+r)=ab+r²+r(a+b)=2ab

[EIFD]/[ABCD]=ab/(2ab)=1/2

3888.- En la figura, calculeu la proporció entre l'àrea groga i l'àrea verda.



Solució:

Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 1$

$\overline{HI} = \frac{1}{\Phi}$

$\overline{JG} = 2 + \frac{1}{\Phi} = \Phi^2$

Siga $S_{CFH} = P, S_{FGH} = Q$

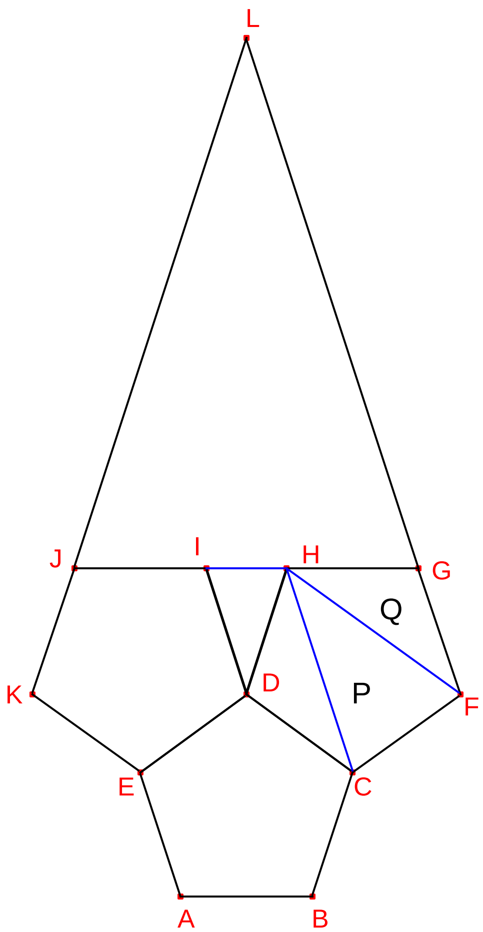
$Q = \frac{1}{\Phi} P$

$S_{HID} = \frac{1}{\Phi^2} P$

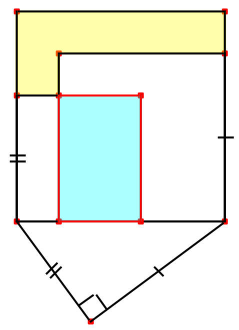
$S_{JGL} = \Phi^4 P$

La proporció d'àrees és:

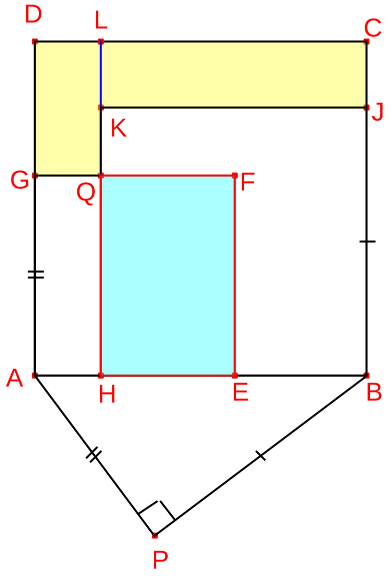
$$\frac{S_{groga}}{S_{verda}} = \frac{S_{HID} + S_{JGL}}{2P + 4Q} = \frac{\Phi^4 + \frac{1}{\Phi^2}}{2 + \frac{4}{\Phi}} = \Phi$$



3889.- La figura està formada per tres quadrats.
Quina àrea és més gran la groga o la blava?



Solució:



AB=c, AE=AP=a, BJ=BP=b

Teorema Pitàgores APB
$c^2=a^2+b^2$

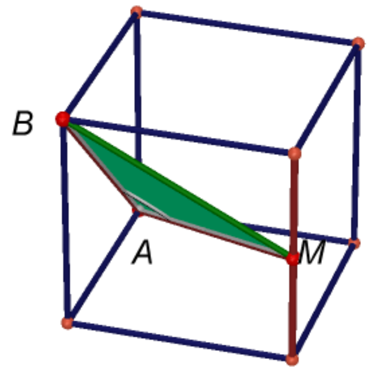
HE=a+b-c
GQ=CJ=c-b
DG=c-a

$[HEFQ]=a(a+b-c)=a^2+ab-ac$

$[GQKJCD]=[GQLD]+[KJCL]=(c-a)(c-b)+b(c-b)=$
$=-ac+c^2+ab-b^2=a^2+ab-ac$

[HEFQ]=[GQKJCD]

3890.- La figura està formada per un cub d'aresta 1.
M és el punt mig de l'aresta.
Calculeu les mesures dels angles, els costats i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$



Solució:
Siga el cub d'aresta $\overline{BD} = \overline{CD} = 1$

$\overline{CM} = \overline{DM} = \frac{1}{2}$

$\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACM}$:

$\overline{AM} = \frac{3}{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BDM}$:

$\overline{BM} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABM}$

$\frac{5}{4} = 2 + \frac{9}{4} - 2 \cdot \sqrt{2}\frac{3}{2}\cos A$

$\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$A = 45°$

$2 = \frac{9}{4} + \frac{5}{4} - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}\cos M$

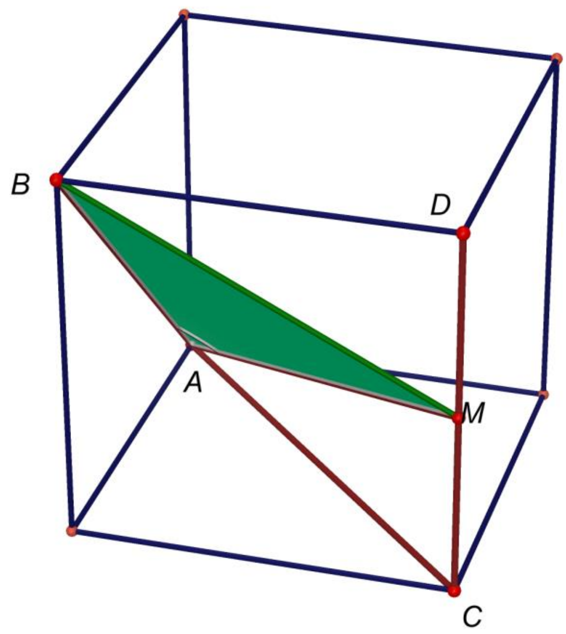
$\cos M = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$M = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5} \approx 63°\,26'$

$\frac{9}{4} = 2 + \frac{5}{4} - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}\cos B$

$\cos B = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$B = \arccos\frac{\sqrt{10}}{10} \approx 71°\,34'$



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ és:

$S_{ABM} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{4}$