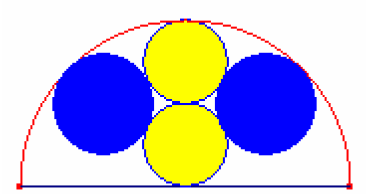
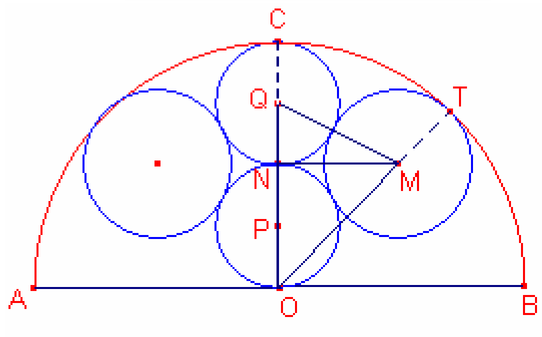
Problemes de Geometria per a l'ESO 39

381.- En un semicercle de radi R s'han inscrit 4 circumferències com els de la figura, dues tenen el centre en el radi perpendicular al diàmetre i les altres són tangents a les dues circumferències anteriors i al semicercle.
Calculeu el radi de les quatre circumferències.



Solució:
Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{AB} = R$.
Siguen Pi Q el centres de les circumferències que el centre estan en el radi $\overline{OC}$ perpendicular al diàmetre $\overline{AB}$.
Siga N el punt de tangència de les dues circumferències.
El radi d'aquestes dues circumferències és:
$\overline{PO} = \frac{1}{4}R$.



Siga M el centre d'una de les circumferències tangents a les dues anteriors.
Siga $r = \overline{MT}$ el seu radi.
$\overline{MN}$ és perpendicular a $\overline{OC}$.
$\overline{QN} = \frac{R}{4}$, $\overline{ON} = \frac{R}{2}$. $\overline{QM} = \frac{R}{4} + r$, $\overline{OM} = R - r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MNQ}$:

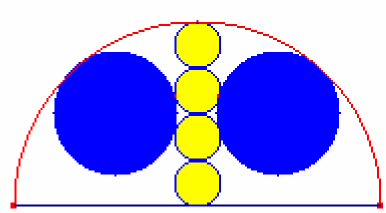
$$\overline{MN}^2 = \left(\frac{R}{4} + r\right)^2 - \left(\frac{R}{4}\right)^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MNO}$:

$$\overline{MN}^2 = (R - r)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

Igualant les expressions (1) (2):
$\left(\frac{R}{4} + r\right)^2 - \left(\frac{R}{4}\right)^2 = (R + r)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2$. Simplificant:
$\frac{5}{2}Rr = \frac{3}{4}R^2$. Resolent l'equació en la incògnita r:
$r = \frac{3}{10}R$.

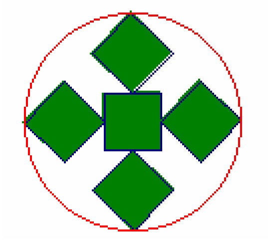
Altre problema:
En un semicercle de radi R s'han inscrit 6 circumferències com els de la figura, dues tenen el centre en el radi perpendicular al diàmetre i les altres són tangents a les circumferències i al semicercle.
Calculeu el radi de les sis circumferències.



Solució:

El radi de les 4 menudes és $s = \frac{1}{8}R$. El radi de les altres dues és $r = \frac{1}{3}R$.

382.- En la figura els 5 quadrats són iguals i el radi de la circumferència és R.
Determineu el costat dels quadrats.
Sangaku



Solució:

Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$.

Siga $c = \overline{AC}$ costat del quadrat.

$\overline{OB} = \frac{c}{2}$.

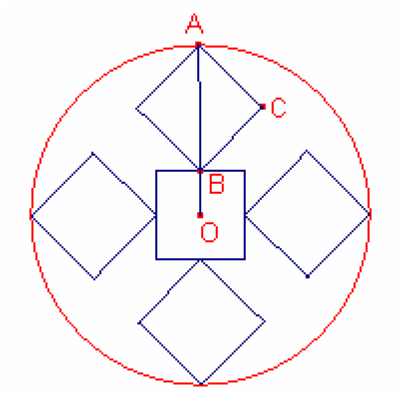
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AB} = c\sqrt{2}$.

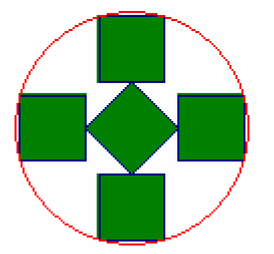
$\overline{OA} = \overline{OB} + \overline{AB}$.

$R = \frac{c}{2} + c\sqrt{2}$. Resolent l'equació en la incògnita c:

$c = \frac{4\sqrt{2}-2}{7}$.



383.- En la figura els 5 quadrats són iguals i el radi de la circumferència és R.
Determineu el costat dels quadrats.



Solució:

Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$.

Siga $c = \overline{AB} = \overline{CD}$ costats dels quadrats.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{COD}$:

$\overline{OD} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.

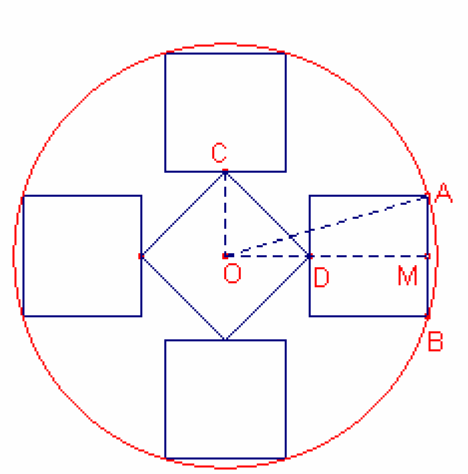
$\overline{AM} = \frac{c}{2}$, $\overline{DM} = c$, $\overline{OM} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}c$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMA}$:

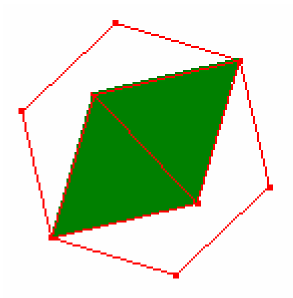
$$R^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}c\right)^2$$

$R^2 = \frac{7+4\sqrt{2}}{4}c^2$. Resolent l'equació en la incògnita c:

$$c = 2R \cdot \sqrt{\frac{7-4\sqrt{2}}{17}}.$$



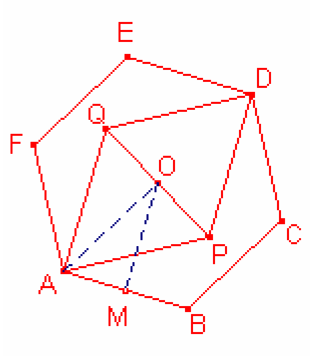
384.- En un hexàgon regular de costat c s'han dibuixat dos triangles equilàters iguals(veure figura). Calculeu la Proporció de les àrees de la suma dels dos triangles equilàters i la de l'hexàgon.



Solució 1:

Siga l'hexàgon regular ABCDEF de centre O i costat $\overline{AB}=c$.

$\overline{AO}=c$.



Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$ de l'hexàgon regular. $\overline{AM}=\frac{c}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOM}$: $\overline{OM}=\frac{c\sqrt{3}}{2}$.

L'àrea de l'hexàgon regular ABCDEF és:

$$S_{ABCDEF}=6\frac{c^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3}{2}c^2\sqrt{3}.$$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{APQ}$ de costat $x=\overline{AP}$. $\overline{OP}=\frac{x}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOP}$:

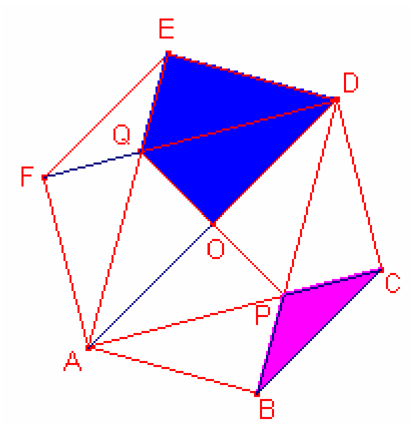
$$x^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+c^2.\ x^2=\frac{4}{3}c^2.$$

La suma de les àrees dels dos triangles equilàters

$$S_{APDQ}=2\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{2}{3}c^2\sqrt{3}.$$

La proporció de les àrees de la suma dels dos triangles equilàters i la de l'hexàgon és:

$$\frac{S_{APDQ}}{S_{ABCDEF}}=\frac{\frac{2}{3}c^2\sqrt{3}}{\frac{3}{2}c^2\sqrt{3}}=\frac{4}{9}.$$



Solució 2:

Siga l'hexàgon regular ABCDEF de centre O.

Siga APDQ el rombe format pels dos triangle equilàters.

$\angle FAE=30^o$, aleshores, Q pertany a la diagonal $\overline{AE}$.

$\angle QED=90^o$.

Els triangles $\overset{\Delta}{QOD}$, $\overset{\Delta}{QED}$ són iguals.

Els triangles $\overset{\Delta}{APD}$, $\overset{\Delta}{BPC}$ són semblants i de raó 2:1.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APD}$ és 4 vegades $\overset{\Delta}{BPC}$, aleshores, l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{QOD}$ és 2 vegades $\overset{\Delta}{BPC}$.

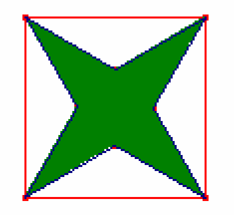
L'àrea del rombe APQD és igual a 4 vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{QOD}$.

L'àrea de l'hexàgon regular ABCDEF és 9 vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{QOD}$.

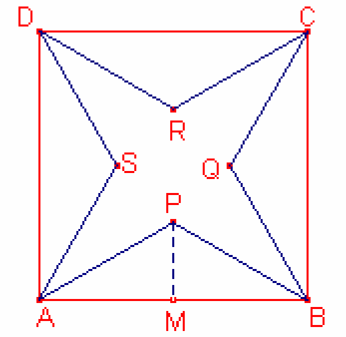
La proporció de les àrees de la suma dels dos triangles equilàters i la de l'hexàgon és:

$$\frac{S_{APDQ}}{S_{ABCDEF}}=\frac{4}{9}.$$

385.- Les quatre puntes de l'estel inscrit en el quadrat de costat c mesuren 30º.
Determineu l'àrea de l'estel.



Solució:
Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga P un dels vèrtexs de l'estel.
L'àrea de l'estel és igual a l'àrea del quadrat menys 4 vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$.



$\angle PBQ = 30^{o}$.
Aleshores, $\angle ABP = 30^{o}$.
Siga $x = \overline{PM}$, $\overline{BP} = 2x$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMP}$:

$$(2x)^2 = x^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Aleshores, $x = \frac{\sqrt{3}}{6}c$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$ és:

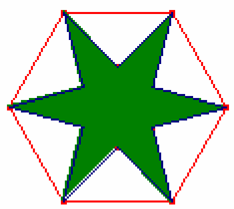
$$S_{ABP} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{PM}}{2} = \frac{c\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}c}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}c^2.$$

L'àrea de l'estel és:

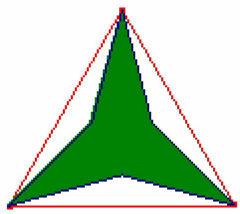
$$S = S_{ABCD} - 4\cdot S_{ABP} = c^2 - 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{12}c^2 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}c^2.$$

Altres problemes:

a) Les sis puntes de l'estel inscrit en l'hexàgon regular de costat c mesuren 30º.
Determineu l'àrea de l'estel.



b) Les tres puntes de l'estel inscrit en el triangle equilàter de costat c mesuren 30º.
Determineu l'àrea de l'estel.

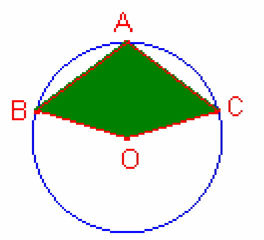


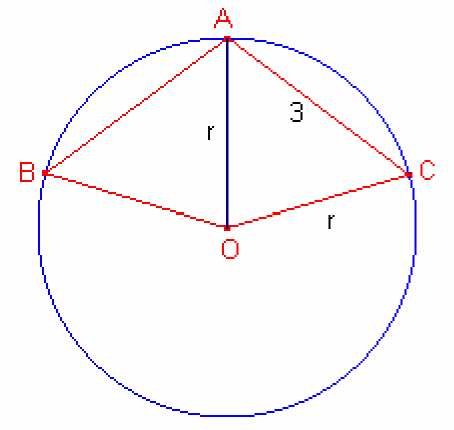
Solució:

a) $S = \frac{3\sqrt{3}-3}{2}c^2$.

b) $S = \frac{2\sqrt{3}-3}{2}c^2$.

386.- En la circumferència de centre O les cordes $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ mesuren 3cm i l'àrea del quadrilàter ABOC és $6cm^2$. Calculeu la mesura del radi.





Solució:

Siga $r=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OA}$ radi de la circumferència.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AOC}$ és la meitat del quadrilàter ABOC.

$$S_{AOC}=3 \qquad (1)$$

Utilitzant la fórmula d'Heró l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AOC}$ és:

$$S_{AOC}=\frac{\sqrt{(3+2r)(-3+2r)3^2}}{4} \qquad (2)$$

Igualant les expressions (1) (2):

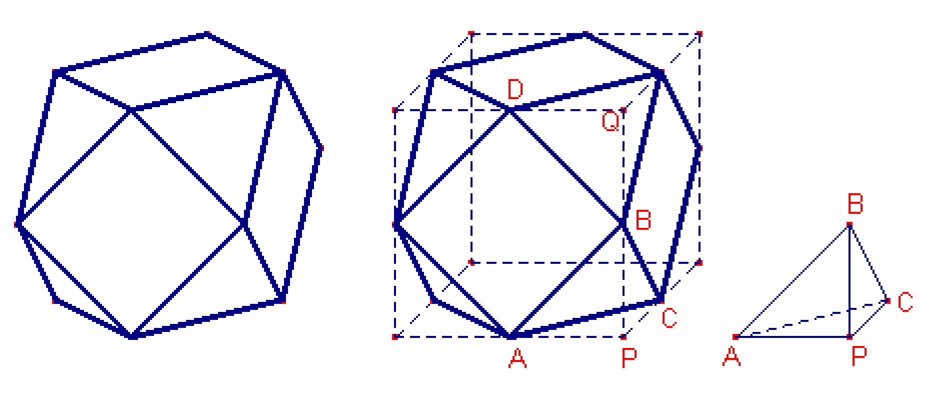
$$3=\frac{\sqrt{(3+2r)(-3+2r)3^2}}{4}.$$

Resolent l'equació:

$$r=\frac{5}{2}.$$

387.- Sabent que el cuboctaedre es construeix pel truncament del cub per $\frac{1}{2}$ de les arestes.
Calculeu el volum del cuboctaedre d'aresta a.

Solució:



Siga $a=\overline{AB}=\overline{BD}$ arestes del cuboctaedre.
L'aresta del cub del qual el cuboctaedre és truncat mesura:
$\overline{PQ}=\overline{AD}=a\sqrt{2}$.

Al truncat el cub eliminem 8 piràmides iguals a la piràmide de base triangular $\overset{\Delta}{APC}$ (triangle rectangle) i cúspide B.
L'altura d'aquesta piràmide és $\overline{PB}$.

$$\overline{AP}=\overline{PC}=\overline{PB}=\frac{\overline{PQ}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

El volum del cuboctaedre és igual al volum del cub menys 8 vegades el volum de la piràmide APCB.

El volum del cub és:

$$V_{cub}=\left(a\sqrt{2}\right)^3=2a^3\sqrt{2}.$$

El volum del tetraedre APCB és:

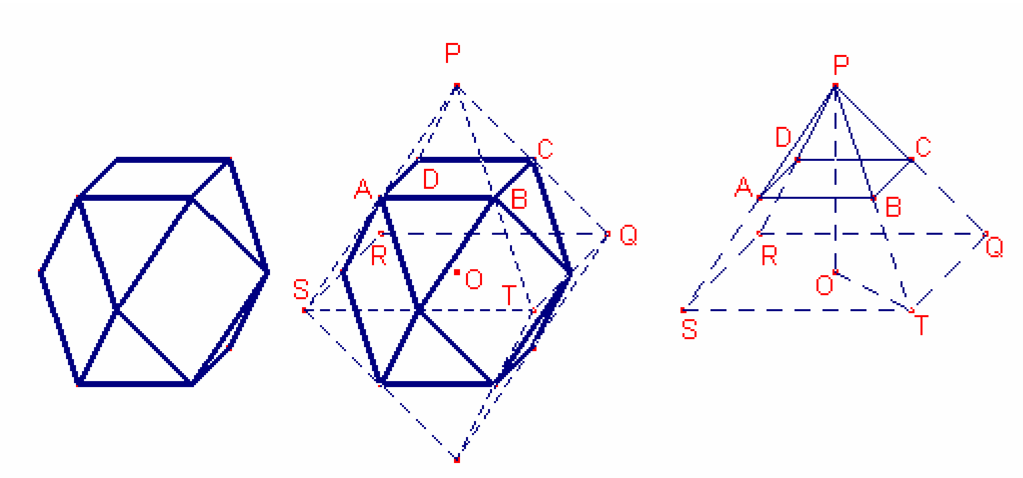
$$V_{APCB}=\frac{1}{3}\frac{\overline{AP}\cdot\overline{PC}}{2}\overline{PB}=\frac{1}{3}\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2}\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{24}.$$

El volum del cuboctaedre:

$$V=V_{cub}-8V_{APCB}=2a^3\sqrt{2}-8\frac{a^3\sqrt{2}}{24}=\frac{5\sqrt{2}}{3}a^3$$

388.- Sabent que el cuboctaedre es construeix pel truncament de l'octaedre per $\frac{1}{2}$ de les arestes.
Calculeu el volum del cuboctaedre d'aresta a.

Solució:



Siga $a = \overline{AB}$ aresta del cuboctaedre.
L'octaedre del qual es truncat el cuboctaedre té aresta:
$\overline{PQ} = 2a$
El octaedre està format per dues piràmides rectes de base un quadrat i costats laterals triangles equilàters.

Siga O el centre de l'octaedre.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OST}$:
$\overline{OT} = a\sqrt{2}$.
$\overline{OP} = \overline{OT} = a\sqrt{2}$.

El volum de la piràmide PQRST és:

$$V_{PQRST} = \frac{1}{3}(2a)^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{4a^3\sqrt{2}}{3}.$$

La piràmide PCDAB és semblant a la piràmide PQRST i la raó de semblança és 1:2.

$$V_{PCDAB} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 V_{PQRST} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

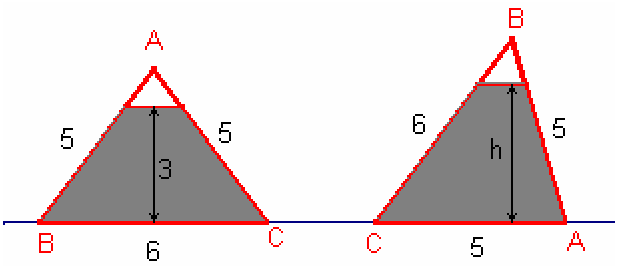
El volum del cuboctaedre és igual al volum de dues piràmides PQRDT menys el volum de sis piràmides PCDAB.

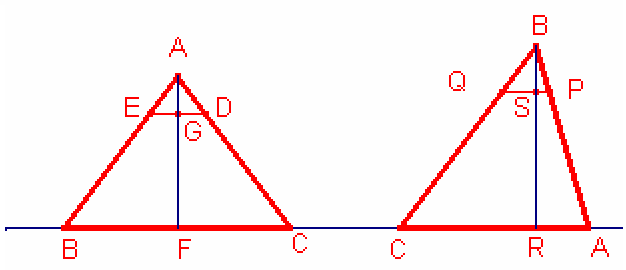
$$V = 2 \cdot V_{PRRST} - 6 \cdot V_{PCDAB} = 2\frac{4a^3\sqrt{2}}{3} - 6\frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{5\sqrt{2}}{3}a^3.$$

389.- Un petjapapers té forma triangular de costats $\overline{BC}=6cm$, $\overline{AB}=\overline{AC}=5cm$ està parcialment ple d'aigua.

Quan el petjapapers reposa sobre el costat $\overline{BC}$ l'aigua té una altura de 3cm.

Quina és l'altura de l'aigua quan el petjapapers reposa sobre el costat $\overline{CA}$.





Solució:

La superfície del trapezis de l'esquerra BCDE, i del trapezi de la dreta CAPQ són iguals.

Siga $\overline{FG}=3$, $\overline{RS}=h$.

Apliquem la fórmula d'Heró per a calcular l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ sobre el costat $\overline{BC}$:

$$\overline{AF}=\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2a}=\frac{\sqrt{16\cdot 4\cdot 6\cdot 6}}{2\cdot 6}=4.$$

Apliquem la fórmula d'Heró per a calcular l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ sobre el costat $\overline{AC}$:

$$\overline{BR}=\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2b}=\frac{\sqrt{16\cdot 4\cdot 6\cdot 6}}{2\cdot 5}=\frac{24}{5}.$$

$$\overline{AG}=\overline{AF}-3=1.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{AED}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{S_{AED}}{S_{ABC}}=\left(\frac{\overline{AG}}{\overline{AF}}\right)^2.\ S_{AED}=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot 12=\frac{3}{4}.$$

$$S_{BCDE}=S_{ABC}-S_{AED}=12-\frac{3}{4}=\frac{45}{4}.$$

$$\overline{BS}=\overline{BR}-h=\frac{24}{5}-h.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{BCA}$, $\overset{\Delta}{BQP}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{S_{BQP}}{S_{ABC}}=\left(\frac{\overline{BS}}{\overline{BR}}\right)^2.\ S_{AED}=\left(\frac{\frac{24}{5}-h}{\frac{24}{5}}\right)^2\cdot 12=\left(1-\frac{5h}{24}\right)^2\cdot 12.$$

$$S_{CAPQ}=S_{ABC}-S_{BQP}=12-\left(1-\frac{5h}{24}\right)^2 12.$$

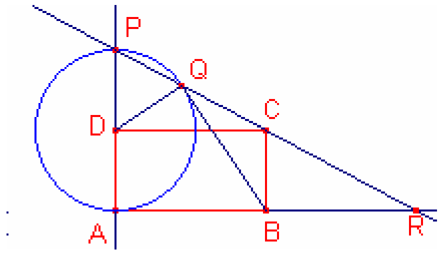
Com que les àrees dels trapezis BCDE, CAPQ són iguals.

$12-\left(1-\frac{5h}{24}\right)^2 12=\frac{45}{4}$. Resolent l'equació:

$$h=\frac{18}{5}=3'6cm$$

390.- Considerem el rectangle ABCD i la circumferència de centre D i radi $\overline{DA}$, que talla la prolongació del costat $\overline{AD}$ en el punt P. La recta PC talla la circumferència en el punt A i la prolongació del costat $\overline{AB}$ en el punt R. Demostreu que $\overline{QB} = \overline{BR}$.

Solució:



Els triangles rectangles $P\overset{\Delta}{D}C$, $C\overset{\Delta}{B}R$ són iguals, aleshores:
$\overline{CD} = \overline{BR}$.
Siga $\alpha = \angle DCP$.
Com que $\overline{DP} = \overline{DQ}$, $\angle CQD = 90^{o}+\alpha$.
$\angle BCQ = 90^{o}+\alpha$.
$\overline{DQ} = \overline{BC}$.

Aleshores els triangles $C\overset{\Delta}{Q}D$, $Q\overset{\Delta}{C}B$ són iguals, aleshores:
$\overline{CD} = \overline{BQ}$.
Per tant, $\overline{QB} = \overline{BR}$.