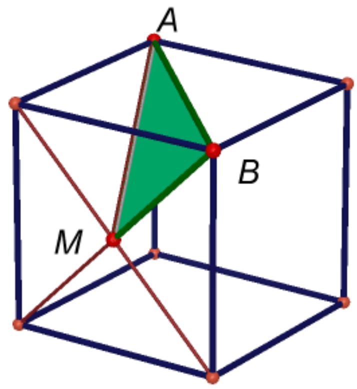
3891.- La figura està formada per un cub d'aresta 1.
M és el centre de la cara.
Calculeu les mesures dels angles, els costats i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$



Solució:
Siga el cub d'aresta $\overline{AC} = 1$

$\overline{CM} = \overline{DM} = \frac{1}{2}$

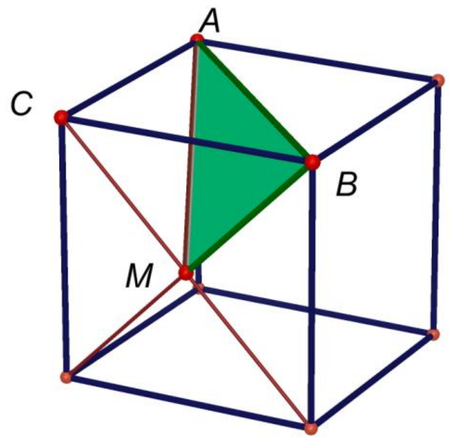
$\overline{AB} = \sqrt{2}$

$\overline{BM} = \overline{CM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\angle ACM = 90°$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACM}$:

$\overline{AM} = \frac{\sqrt{6}}{2}$



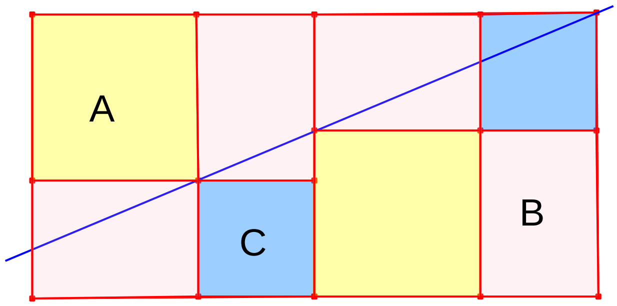
Notem que $\overline{AM}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{AB}^2$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ és rectangle $M = 90°$
$A = 30°, B = 60°$

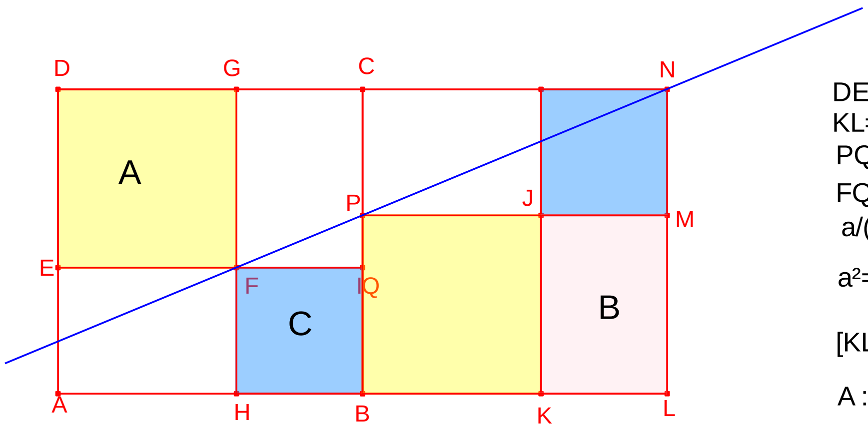
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ és:

$S_{ABM} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

3892.- La figura està formada per quadrats i rectangles.
Calculeu la proporció $A : B : C$



Solució:



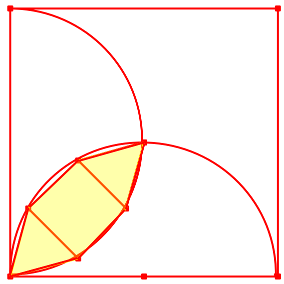
DE=a, HB=c,
KL=c, LM=a
PQ=a-c
FQP, PMN semblants
a/(a+c)=(a-c)/c

a²=2c²

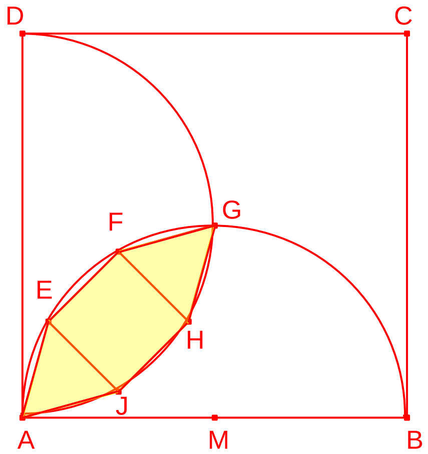
[KLMJ]=ac=c²·sqrt(2)

A : B : C = 2 : sqrt(2) : 1

3893.- La figura està formada per un quadrat i dos semicercles sobre els costats.
En la intersecció dels dos semicercles s'han inscrit dos triangles equilàters i un quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:



AB=2

AE=EF=FG=c

AngleEMF=30º

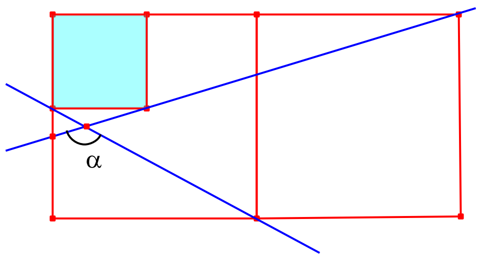
c=(sqrt(6)-sqrt(2))/2

[AEFGHJ]=(sqrt(3)/2+1)c²=1/2

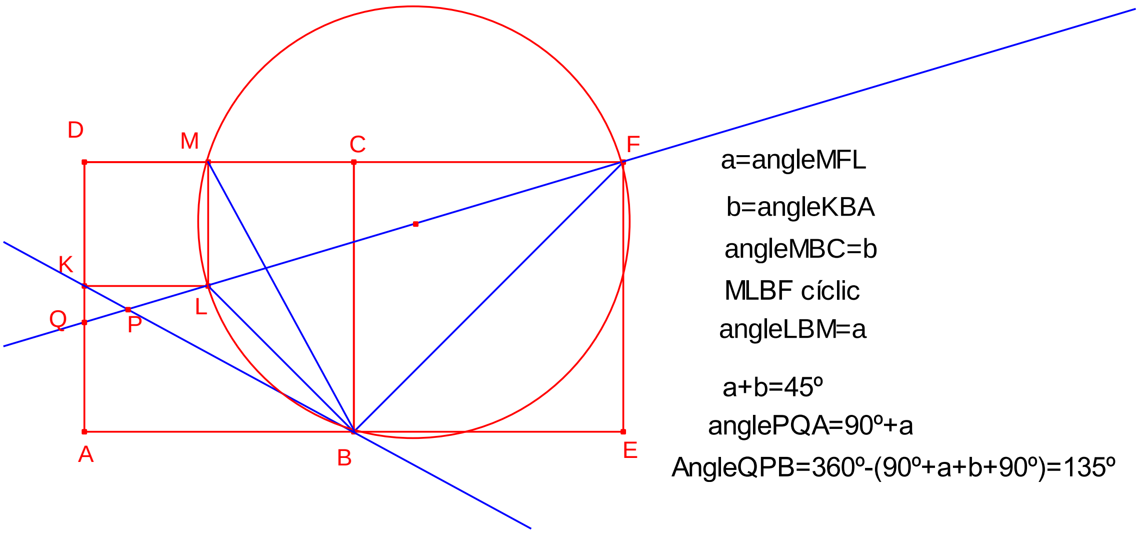
[ABCD]=4

[AEFGHJ]/[ABCD]=1/8

2894.- La figura està formada per tres quadrats. Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:



a=angleMFL

b=angleKBA

angleMBC=b

MLBF cíclic

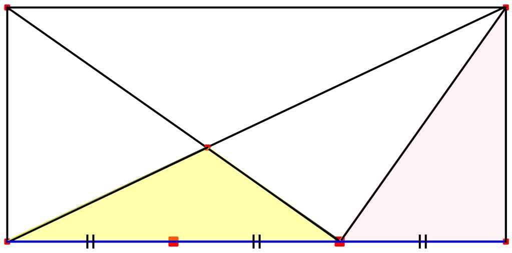
angleLBM=a

a+b=45º

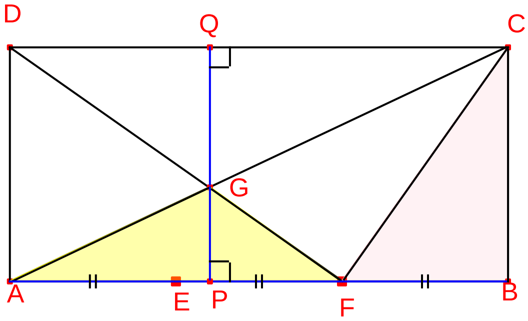
anglePQA=90º+a

AngleQPB=360º-(90º+a+b+90º)=135º

3895.- Un costat del rectangle s'ha dividit en tres parts iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea groga i l'àrea rosa.



Solució:



AE=EF=FB=a

AB=CD=3a

AF=2a

BE=5b

AFG, DCG semblantrs i de raó 2:3

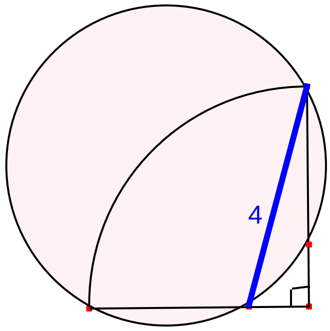
PG=2b, QG=3b

[FBC]=5ab/2

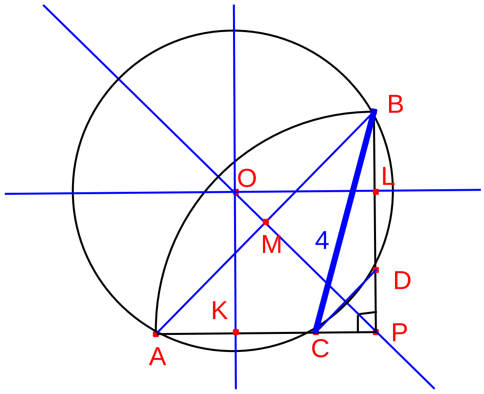
[AFG]=2ab

[AFG]/[FBC]=4/5

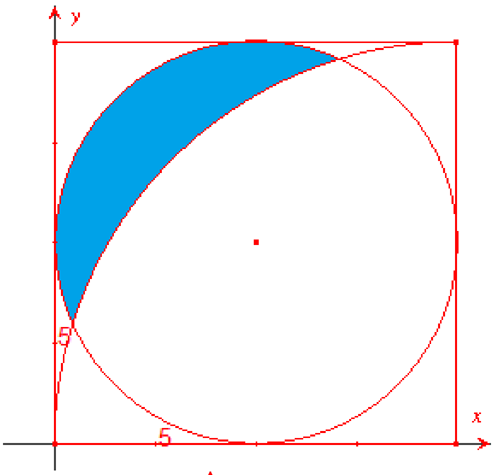
3896.- La figura està formada per un quadrant i un cercle
La corda de la circumferència mesura 4.
Calculeu l'àrea del cercle.



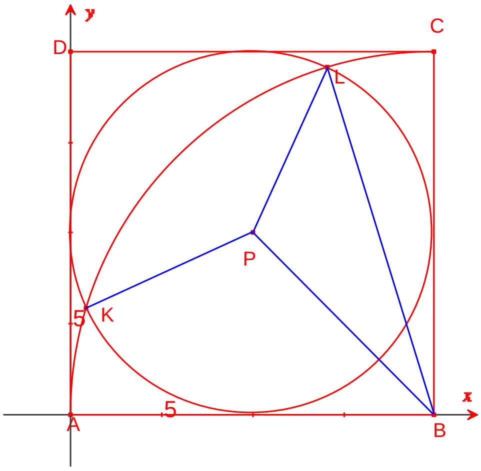
Solució:
Siga el quadrant de centre P i radi $\overline{PA} = \overline{PB}$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$
La mediatriu del segment $\overline{AB}$ passa per O, P
Aleshores $OKPL$ és un quadrat.
Per tant, $\overline{AC} = \overline{BD}, \overline{PC} = \overline{PD}$
$\angle CDB = 135°$
$\angle LOB = 90°, \overline{OC} = \overline{OB}$
$R = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{BC} = 2\sqrt{2}$
L'àrea del cercle de centre O és:
$S_O = \pi R^2 = 8\pi$



3897.- La figura està formada per un quadrat de costat 20, la circumferència inscrita i un quadrant.
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució 1:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 20$
Siga el cercle inscrit en el quadrat de centre P i radi 10
$\overline{BP} = 10\sqrt{2}$
Siga el quadrant de centre B i radi 20
Siguen K, L la intersecció del quadrant i del cercle.
Siguen $\angle PBL = \alpha, \angle LPB = \beta$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BPL}$

$$100 = 400 + 200 - 2 \cdot 200\sqrt{2} \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{8}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{14}}{8}$$

$$400 = 100 + 200 - 2 \cdot 100\sqrt{2} \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{-\sqrt{2}}{4}, \sin\beta = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del sector de centre P i radi 10 i angle $2\pi - 2\beta$ menys l'àrea del sector de centre P i radi 20 i angle 2α menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KPL}$, més l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KBL}$:

$$S_{ombrejada} = (\pi - \beta)10^2 - \alpha 20^2 - \frac{1}{2}10^2\sin(-2\beta) + \frac{1}{2}20^2\sin 2\alpha$$

$$S_{ombrejada} = \left(\pi - arccos\frac{-\sqrt{2}}{4}\right)100 - 200\arccos\frac{5\sqrt{2}}{8} - 50\frac{\sqrt{7}}{4} + 100\frac{5\sqrt{7}}{16}$$

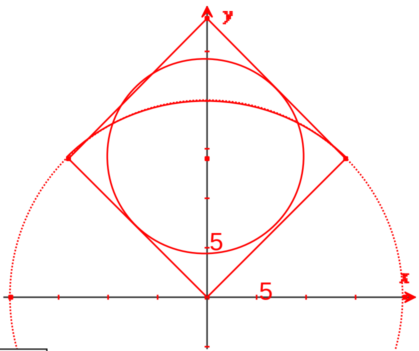
$$S_{ombrejada} = \left(\pi - arccos\frac{-\sqrt{2}}{4}\right)100 - 200\arccos\frac{5\sqrt{2}}{8} + 50\sqrt{7}$$

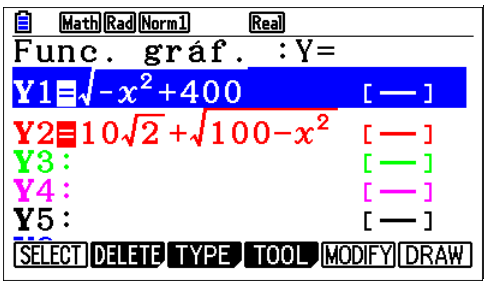
$$\approx 58.5525$$

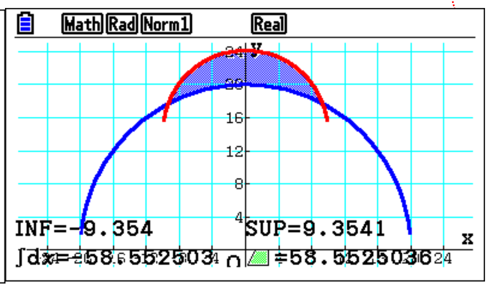
Solució 2:
Efectuem un canvi d'eixos en el problema:
Les circumferències tenen equacions:

$x^2 + (y - 10\sqrt{2})^2 = 10^2$
$x^2 + y^2 = 20^2$

Representem les dues funcions i calculem l'àrea

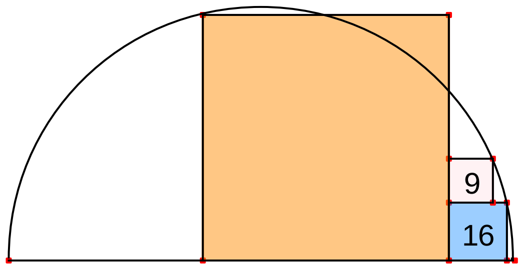




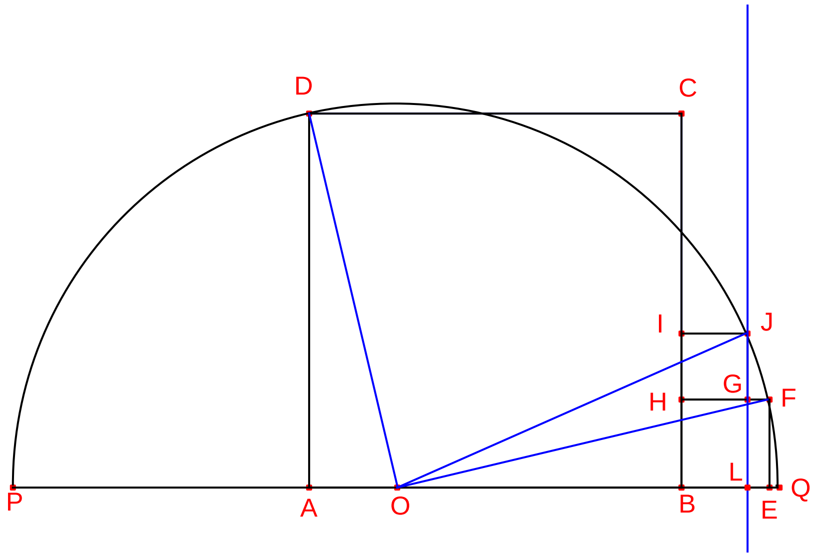


$S_{ombrejada} \approx 58.5525$

3898.- La figura està formada per un semicercle i tres quadrats.
Es donen les àrees dels quadrats més menuts 9, 16.
Calculeu l'àrea del quadrat gran.



Solució:



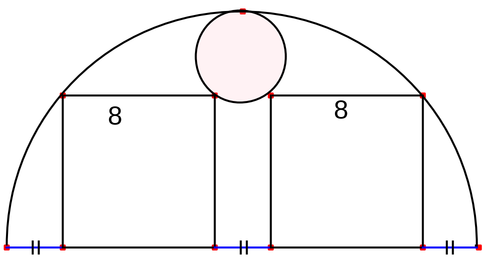
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OP} = R$
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = 4$
Siga el quadrat $GIHJ$ de costat $\overline{GH} = 3$
Siga la projecció L de G sobre el diàmetre $\overline{PQ}$

$\overline{OA} = \sqrt{R^2 - c^2}, \overline{OE} = \sqrt{R^2 - 16}, \overline{AE} = c + 4$
$\sqrt{R^2 - c^2} + \sqrt{R^2 - 16} = c + 4$
Simplificant:
$R^2 = c^2 + 16$

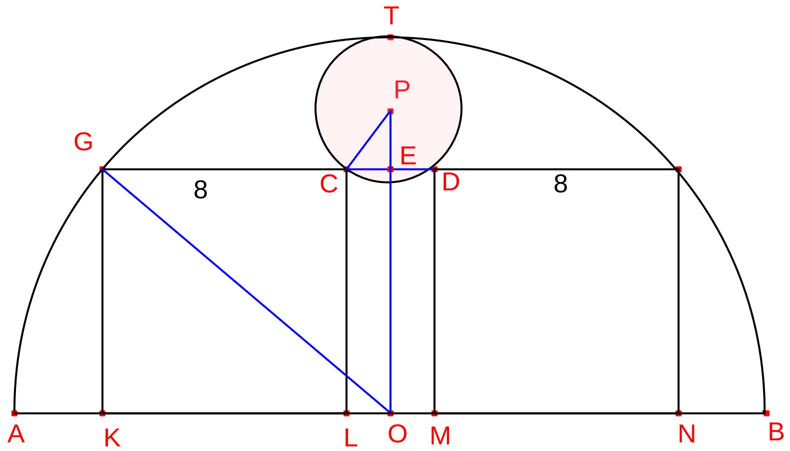
$\overline{OA} = \sqrt{R^2 - c^2}, \overline{OL} = \sqrt{R^2 - 49}, \overline{AL} = c + 3$
$\sqrt{R^2 - c^2} + \sqrt{R^2 - 49} = c + 3$
Simplificant:
$(c + 3)\sqrt{R^2 - 49} = c^2 + 3c - 20$

Resolent el sistema:
$c = 17$
L'àrea del quadrat gran és:
$S_{ABCD} = 17^2 = 289$

3899.- La figura està formada per un semicercle, dos quadrats iguals de costat 8 i un cercle.
Calculeu l'àrea del cercle.



Solució:



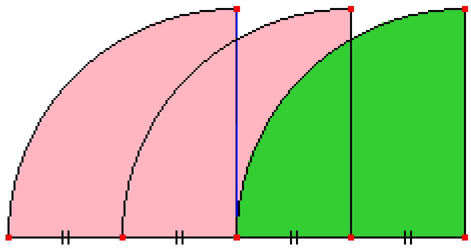
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OA} = R$
$\overline{AK} = \overline{LM} = \overline{NB} = 2a$
$R = 3a + 8$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKG}$:
$(8 + 3a)^2 = 64 + (8 + a)^2$
resolent l'equació:
$a = -2 + 2\sqrt{3}, R = 2 + 6\sqrt{3}$

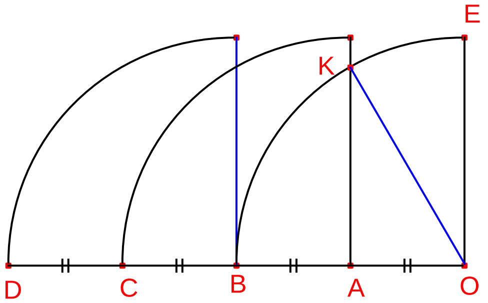
Siga el cercle de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PC} = r$
Siga E el punt mig del segment $\overline{CD}$
$\overline{CE} = a, \overline{PE} = R - 8 - r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CEP}$:
$r^2 = a^2 + (R - 8 - r)^2$
Resolent l'equació:
$r = \frac{10}{3}\left(\sqrt{3} - 1\right) \approx 2.4402$

3900.- La figura està formada per tres quadrants iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea lila.



Solució:



Siga $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = a$
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OB} = \overline{OE} = 2a$
$\angle BOK = 60°$

L'àrea verda és igual a l'àrea del quadrant de centre O:
$S_{verda} = \frac{1}{4}\pi 4a^2 = \pi a^2$
L'àrea lila és igual al doble de l'àrea del quadrant de centre A i radi $2a$ menys l'àrea del sector de centre O, radi 2a i 60º més l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOK}$:
$S_{lila} = 2\left(\pi a^2 - \frac{2}{3}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right) = \left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\right)a^2$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{verda}}{S_{lila}} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}} = \frac{3\pi}{2\pi + 3\sqrt{3}} \approx 0.8210$