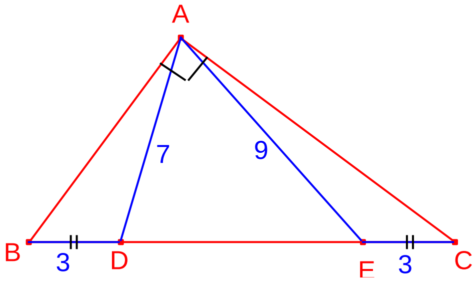
3901.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$
Siguen D, E en la hipotenusa $\overline{BC}$ tals que
$\overline{BD} = 3, \overline{CE} = 3, \overline{AD} = 7, \overline{AE} = 9$
Calculeu la mesura del segment $\overline{DE} = x$



Solució:
Siga M el punt mig de la hipotenusa $\overline{BC}$
En un triangle rectangle la mitjana sobre la hipotenusa mesura la meitat de la hipotenusa.

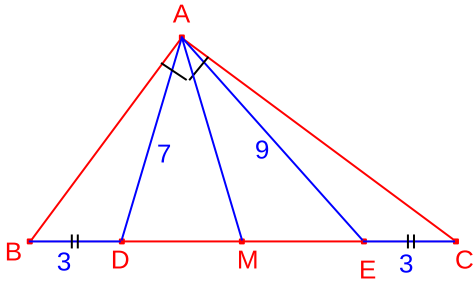
$$\overline{AM} = \frac{6+x}{2}$$

M és el punt mig del $\overline{DE}$

$\overline{AM}$ és mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$:

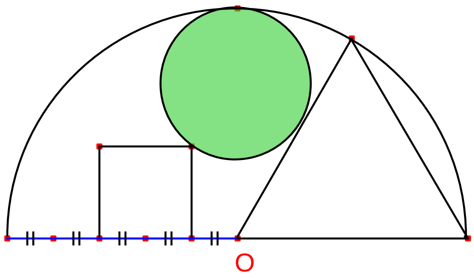
$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{2\cdot 7^2 + 2\cdot 9^2 - x^2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2\cdot 7^2 + 2\cdot 9^2 - x^2}}{2} = \frac{6+x}{2}$$

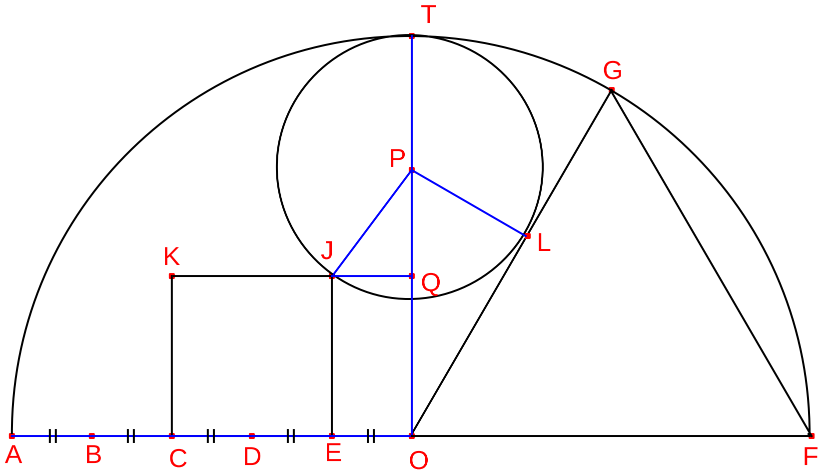


Simplificant:
$x^2 + 6x - 112 = 0$
resolent l'equació:
$x = 8$

3902.- La figura està formada per un semicercle que conté en el seu interior un quadrat, un triangle equilàter i un cercle.
Calculeu la proporció entre l'àrea del cercle i l'àrea del semicercle.



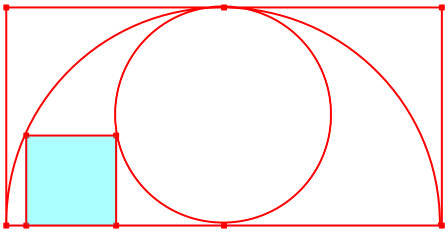
Solució:



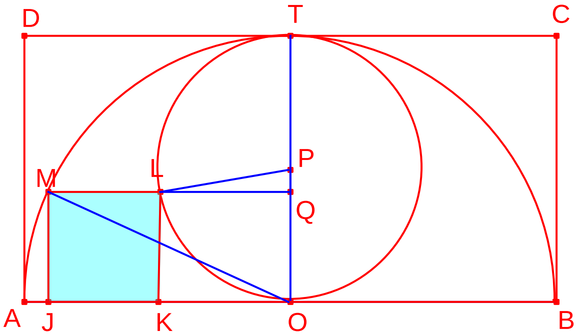
Siga $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EO} = a$
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OF} = 5a$
Siga el quadrat $CEJK$ de costat $\overline{CE} = 2a$
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{OFG}$ de costat $\overline{OF} = \overline{OG} = 5a$

Siga el cercle de centre P i radi $\overline{PJ} = \overline{PT} = r$
Suposem que T és la meitat de l'arc de semicircumferència.
Siga Q la projecció de J sobre $\overline{OT}$
$\overline{JQ} = a, \overline{PQ} = 5a - 2a - r = 3a - r$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JQP}$:
$r^2 = a^2 + (3aa - r)^2$
Simplificant:
$10a^2 - 6ar = 0$
Resolent l'equació:
$r = \frac{5}{3}a$
Siga L la projecció de P sobre $\overline{AG}$
Siga $\overline{PL} = s$
Vegem que $s = r$
$\overline{OP} = 5a - r = \frac{10}{3}a, \angle POL = 30°$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPL}$:
$s = r$
Aleshores, és vàlida la suposició que T és el punt mig de l'arc de semicercle.
La proporció entre l'àrea del cercle de centre P i el semicercle de centre O és:
$\frac{S_P}{S_O} = \frac{\pi r^2}{\frac{1}{2}\pi \cdot 25a^2} = \frac{2}{9}$

3903.- Dins d'un rectangles s'ha inscrit un semicercle. Dins del semicercle s'ha dibuixat un circumferència i un quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrat i l'àrea del rectangle.



Solució:



Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 2R, \overline{AD} = R$
Siga el quadrat $JKLM$ de costat $\overline{JK} = c$
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PL} = \frac{1}{2}R$

Siga Q la projecció de L sobre el segment $\overline{OP}$.
Siga $\overline{LQ} = a$

$$\overline{MQ} = c + a, \overline{PQ} = \frac{1}{2}R - c$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LQP}$:

$$a^2 = \frac{1}{4}R^2 - \left(\frac{1}{2}R - c\right)^2$$

$$a = \sqrt{Rc - c^2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MQO}$:

$$R^2 = c^2 + \left(c + \sqrt{Rc - c^2}\right)^2$$

Simplificant:

$$5c^4 - 2Rc^3 - R^2c^2 - 2R^3c + R^4 = 0$$

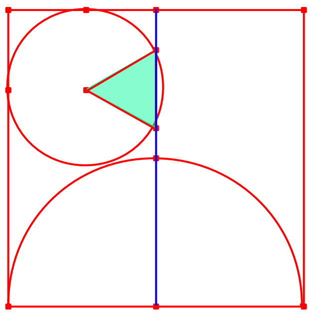
Resolent l'equació amb ajut de la calculadora:

$$c \approx 0.4163 \cdot R$$

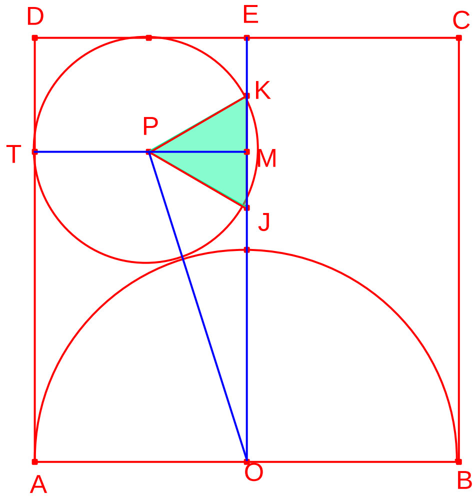
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{JKLM}}{S_{ABCD}} = \frac{c^2}{2R^2} \approx 0.0866$$

3904.- Sobre un costat d'un quadrat s'ha dibuixat un semicercle.
Una circumferència és tangent al semicercle i a dos costats del quadrat.
El triangle ombrejat és equilàter?

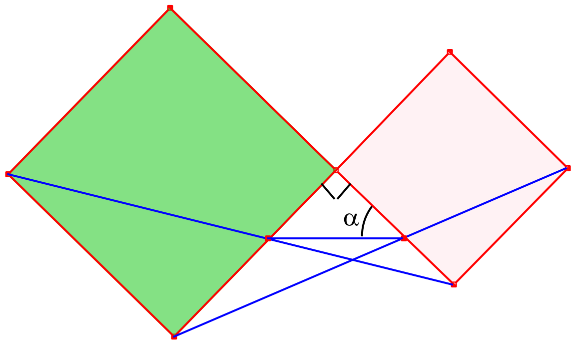


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2R$
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PJ} = \overline{PK} = r$
Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{PJK}$.
Siga M la projecció de P sobre $\overline{OE}$
M és el punt mig del costat $\overline{JK}$
$\overline{PM} = R - r, \overline{OP} = R + r, \overline{OM} = 2R - r$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMP}$:
$(R + r)^2 = (R - r)^2 + (2R - r)^2$
Simplificant:
$r^2 - 8Rr + 4R^2 = 0$
Resolent l'equació:
$r = \left(4 - 2\sqrt{3}\right)R$

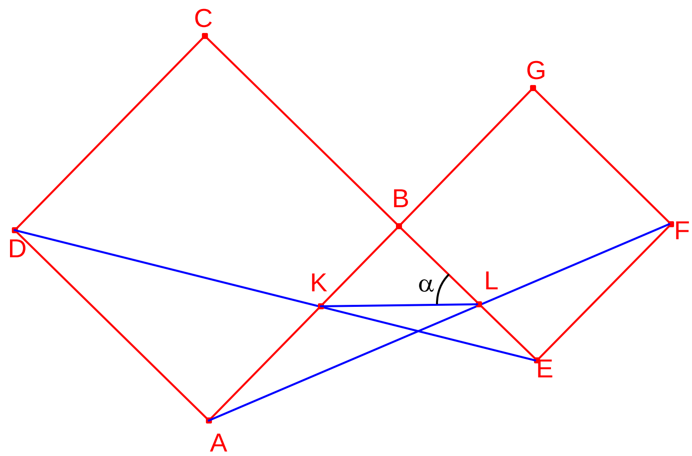


$\overline{PM} = R - r = 2\sqrt{3} - 3$
$\frac{\overline{PM}}{\overline{PJ}} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{4 - 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Aleshores, $\angle JPK = 60°$
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{PJK}$ és equilàter.

3905.- La figura està formada per dos quadrats que tenen els costats perpendiculars.
Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:



AB=a, BE=b

BL=x, BK=y

AGF, ABL semblants

x=ab/(a+b)

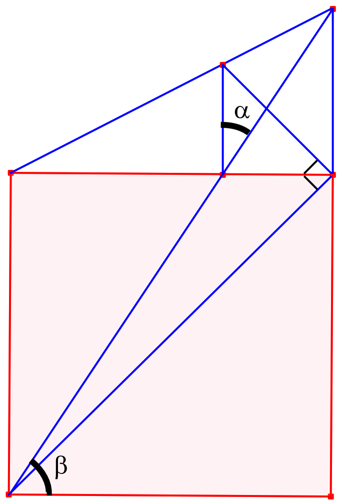
ECD, EBK semblants

y=ab/(a+b)

KBL isòsceles

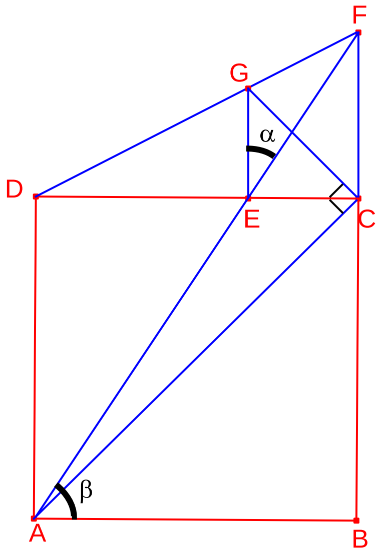
α =45º

3906.- En el quadrat de la figura, calculeu $\alpha + \beta$

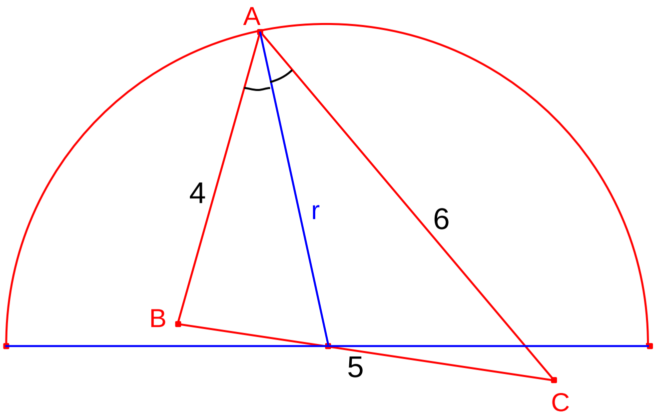


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga $\overline{CF} = a$
Siga $\angle BAE = \beta, \angle GEF = \alpha$
Siga $\angle CDF = \gamma$
$\angle ECG = 45°$

$\angle FEC = \beta$
$\tan\beta = \dfrac{a+1}{1}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABF}, \overset{\Delta}{ECF}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{EC} = \dfrac{a}{a+1}$
$\tan\gamma = \dfrac{a}{1}$
$\sin\gamma = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{DCG}$:
$\dfrac{\overline{CG}}{\sin\gamma} = \dfrac{1}{\sin(45° + \gamma)}$
$\dfrac{\overline{CG} \cdot \sqrt{1+a^2}}{a} = \dfrac{\sqrt{1+a^2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+a)}$
$\overline{CG} = \dfrac{a}{1+a}\sqrt{2}$
$\overline{CG} = \overline{CE}\sqrt{2}$
Aleshores, $\angle GEC = 90°$
Aleshores, $\alpha + \beta = \angle GEC = 90°$



3907.- En la figura, la bisectriu de l'angle A del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és igual al radi de semicercle.
Calculeu l'àrea del semicercle.



Solució:
Siga $\overline{OB} = x, \overline{OC} = 5 - x$

Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{x}{4} = \frac{5-x}{6}$$

aleshores, $x = 2$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$36 = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos B$$

$$\cos B = \frac{1}{8}$$

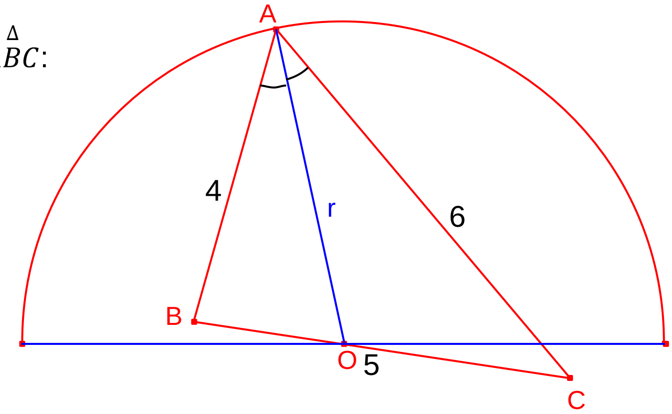
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BOA}$:

$$r^2 = 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{8}$$

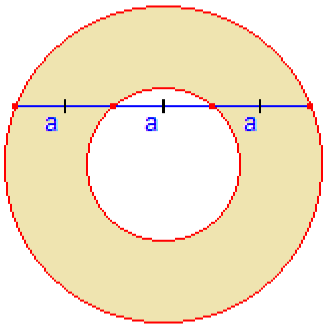
$$r^2 = 18$$

L'àrea del semicercle és:

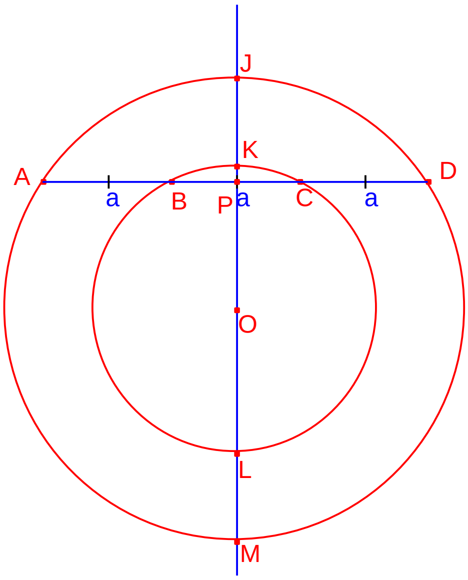
$$S = \frac{1}{2}\pi r^2 = 9\pi$$



3908.- Calculeu l’àrea de la corona circular.



Solució:



OJ=R, OK=r

PK=x

Potència P respecte circumferència interior

$a^2/4=x(2r-x)$

PJ=R-r+x, PM=R+r-x

Potència P respecte circumferència exterior

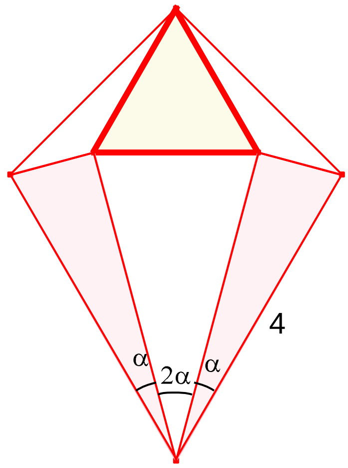
$(9/4)a^2=(R+r-x)(R-(r-x))$

Restant les expressions:

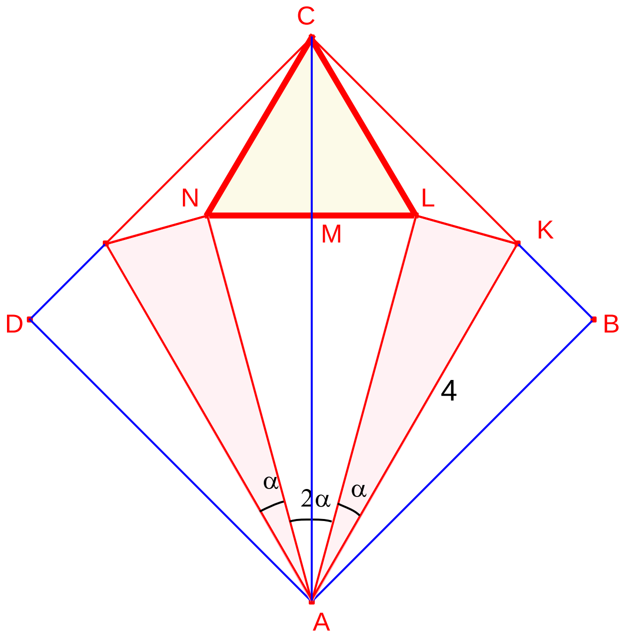
$2a^2=R^2-r^2$

$S=2\cdot Pi\cdot a^2$

3909.- Un full quadrat de paper es plega simètricament des d'un vèrtex.
Si la longitud del plec és 4, calculeu l'àrea del triangle format pels altres tres vèrtexs.



Solució:



AB=c

α =15º

c/4=cos15º

c=sqrt(6)+sqrt(2)

LN=a

$a^2=c^2+c^2-2\cdot c^2\cdot \sin(30º)=4$
a=2

ALK, AML semblants

$AM=c^2/4=2+\mathrm{sqrt}(3)$

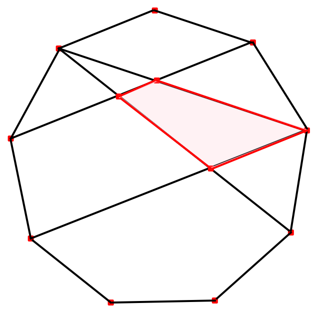
$AC=c\cdot \mathrm{sqrt}(2)=2+2\mathrm{sqrt}(3)$

CM=AC-AM=sqrt(3)

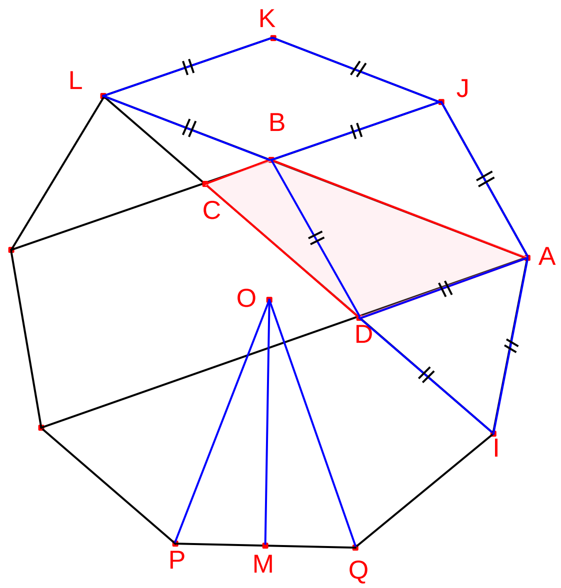
LCN equilàter

$[LCM]=\mathrm{sqrt}(3)/4\cdot a^2=\mathrm{sqrt}(3)$

3910.- En un polígon regular de nou costats s'han dibuixat quatre diagonals.
Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrilàter ombrejat i l'àrea del polígon regular.



Solució:
Siga el polígon regular de 9 costats de centre O i costat $\overline{PQ} = 2$
Siga M el punt mig del costat $\overline{PQ}$
$\overline{OM} = \tan 70°$



L'àrea del polígon regular és:
$S_9 = 9 \cdot \tan 70°$
$\angle DIA = \angle DAI = 60°$
Aleshores, $\overline{AD} = 2$
$\angle JAL = \angle JBL = 40°$
Aleshores, $\overline{BJ} = 2$

$\angle DAJ = 80°, \angle BJA = 100°$
Aleshores, $AJBD$ és un paral·lelogram
Aleshores, $\overline{BD} = 2, \angle BDA = 100°$
$\angle BJK = 40°, \angle JKL = 140°$
Aleshores, $BJKL$ és un paral·lelogram
Aleshores, $\overline{LB} = 2$
$\angle LCB = 120°$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BDA}$ és:

$$S_{BDA} = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \sin 100° = 2 \cdot \cos 10°$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{LCB}$:

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 20°} = \frac{2}{\sin 120°}$$

$$\overline{BC} = \frac{2 \cdot \sin 20°}{\sin 60°}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és:

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2 \cdot \sin 20°}{\sin 60°} \cdot \sin 100° = 2 \cdot \frac{\sin 20°}{\sin 60°} \cos 10°$$

La proporció entre l'àrea del quadrilàter ombrejat i l'àrea del polígon regular és:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_9} = \frac{1}{9} \frac{2 \cos 10° \cdot \sin 20° \left(1 + \frac{\sin 20°}{\sin 60°}\right)}{\cos 20°} = \frac{1}{9} \frac{2 \cos 10° \cdot \sin 20° \left(\sin 20° + \sin 60°\right)}{\sin 60° \cdot \cos 20°} =$$

$$= \frac{1}{9} \frac{2 \cos 10° \cdot \sin 20° \, 2 \sin 40° \cdot \cos 20°}{\sin 60° \cdot \cos 20°} = \frac{1}{9} \frac{2 \cos 10° \cdot \sin 20° \, 2 \sin 40°}{\sin 60°} =$$

$$= \frac{1}{9} \frac{2 \cos 10° \cdot (\cos 20° - \cos 60°)}{\sin 60°} = \frac{1}{9} \frac{\cos 10° + \cos 30° - \cos 10°}{\sin 60°} = \frac{1}{9}$$