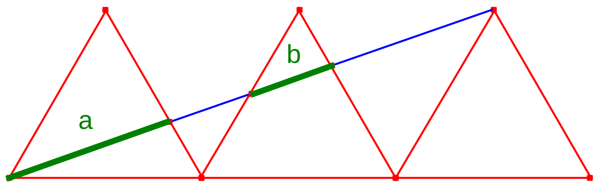
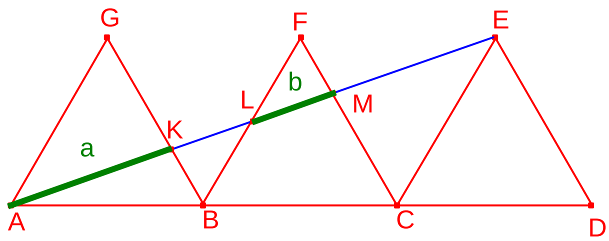
Problemes de Geometria per a l'ESO 392

3911.- La figura està formada per tres triangles equilàters iguals.
Calculeu la proporció $a : b$



Solució:



AK=a, LM=b
KL=x, ME=y

AK : AB = KM : BC = ME : CD
a=b+x=y

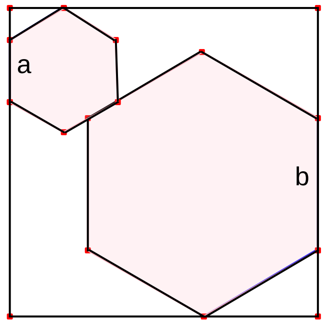
BL : AB = CE = AC
CE=2·BL
KBL, MCE semblants
y=2x

b+x=2x
b=x

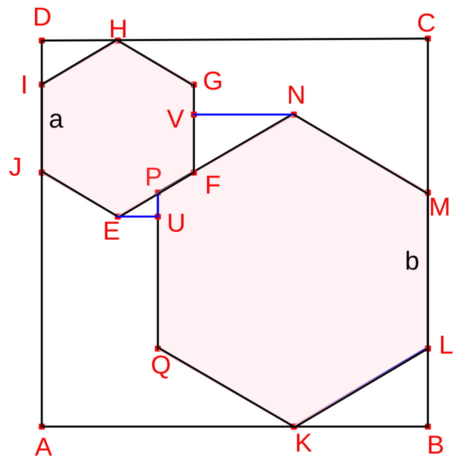
a=2b

a : b = 2 :1

3912.- Dins d'un quadrat s'han dibuixat dos hexàgons regulars de costats a, b.
Calculeu la mesura del costat del quadrat.



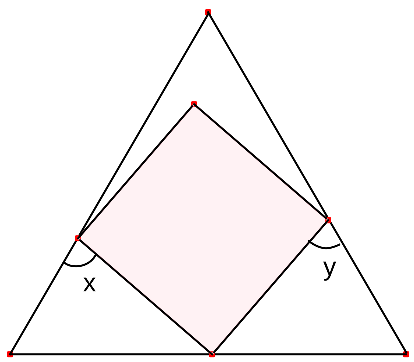
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$
Siga l'hexàgon regular $EFGHIJ$ de costat $\overline{EF} = a$
Siga l'hexàgon regular $KLMNPQ$ de costat $\overline{KL} = b$
Siga $\overline{PF} = x$



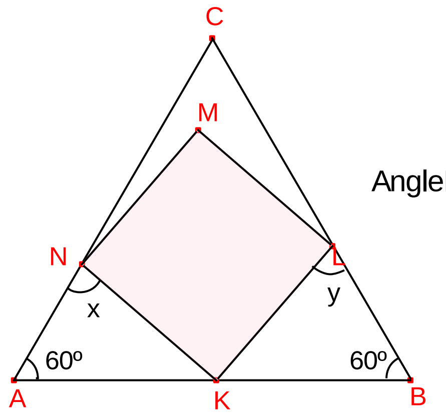
$$\overline{PE} = a - x, \overline{PU} = \frac{1}{2}(a - x), \overline{QU} = b - \frac{1}{2}(a - x)$$
$$\overline{AD} = 2a + b - \frac{1}{2}(a - x) + \frac{1}{2}b = \frac{3}{2}(a + b) + \frac{1}{2}x$$

$$\overline{FN} = b - x, \overline{VF} = \frac{1}{2}(b - x), \overline{VN} = \frac{\sqrt{3}}{2}(b - x)$$
$$\overline{AB} = a\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}(b - x) + \frac{\sqrt{3}}{2}b = (a + b)\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x$$
$$\frac{3}{2}(a + b) + \frac{1}{2}x = (a + b)\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x$$
$$x = \frac{9 - 5\sqrt{3}}{2}(a + b)$$
$$\overline{AB} = \frac{5}{4}(3 - \sqrt{3})(a + b)$$

3913.- En un triangle equilàter s'ha inscrit un quadrat.
Calculeu $x + y$



Solució:



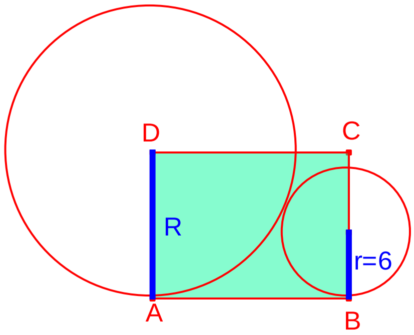
AngleNKB=x+60º
AngleLKA=y+60º

AngleNKB+AngleLKA=180º+90º=x+y+60º+60º

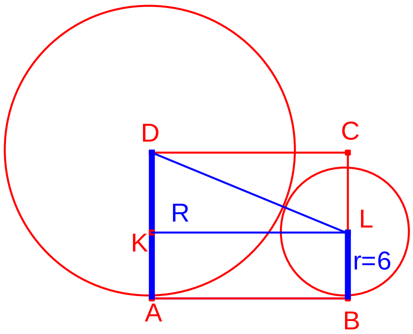
270º=x+y+120º

x+y=150º

3914.- Siga el rectangle $ABCD$ d'àrea 243.
Siga la circumferència de centre D i radi $\overline{DA} = R$
Siga la circumferència que passa per B de radi $r = 6$ i amb diàmetre sobre el costat $\overline{BC}$
Dues circumferències de radis, $R, r = 6$ són tangents exteriors.
Calculeu el radi R

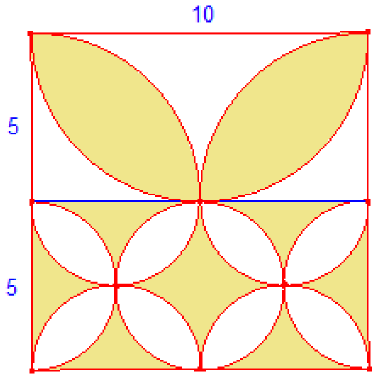


Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = a, \overline{AD} = R$
La seua àrea és 243:
$aR = 243$
Siga la circumferència de centre L i radi $r = \overline{LB} = 6$
Siga K la projecció de L sobre el costat $\overline{AD}$

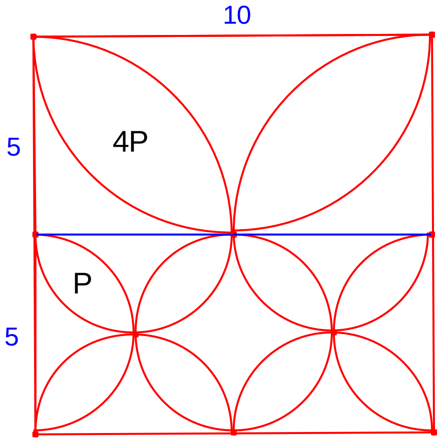


$\overline{DK} = R - 6, \overline{DL} = R + 6$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DKL}$:
$(R+6)^2 = a^2 + (R-6)^2$
$24R = a^2$
$24aR = a^3$
$24 \cdot 243 = a^3$
$a = 18$
$$R = \frac{243}{18} = \frac{27}{2}$$

3915.- Calculeu l'àrea ombrejada dins del quadrat.

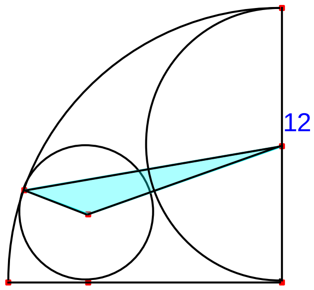


Solució:

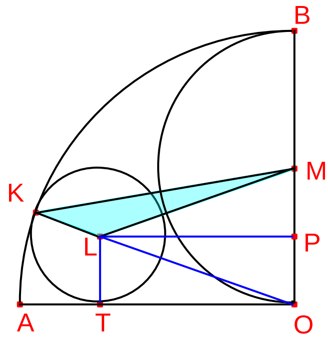


[ombrejada]=10·5=50

3916.- La figura està formada per un quadrant de radi 12, un semicercle i un cercle.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OB} = 12$
Siga el semicercle de centre M i radi $\overline{MO} = \overline{MB} = 6$
Siga el cercle de centre L i radi $\overline{LT} = \overline{LK} = r$
Siga P la projecció de L sobre $\overline{OB}$
$\overline{OL} = 12 - r, \overline{LM} = 6 + r, \overline{MP} = 6 - r$

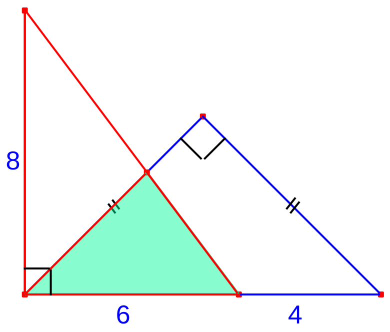


Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{LTO}, \overset{\Delta}{LPM}$:
$(12 - r)^2 - r^2 = (6 + r)^2 - (6 - r)^2$
Simplificant:
$144 - 24r = 24r$
Resolent l'equació:
$r = 3$

Notem que els triangles rectangles $\overset{\Delta}{LPO}, \overset{\Delta}{LPM}$ són iguals.
Siga $\alpha = \angle MLP = \angle PLO$
$\sin\alpha = \frac{1}{3}, \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
$\angle KLM = 180° - 2\alpha$

L'àrea del triangle ombrejat $\overset{\Delta}{KLM}$ és:
$S_{KLM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{KL} \cdot \overline{LM} \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 6\sqrt{2} \approx 8.4854$

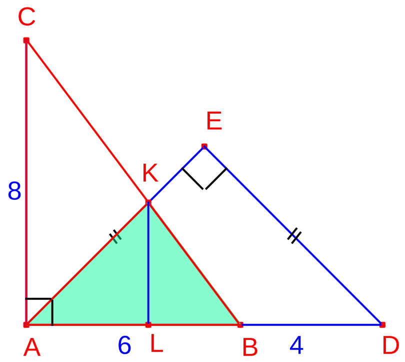
3917.- La figura està formada per dos triangles rectangles.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat, intersecció dels dos triangles rectangles.



Solució:

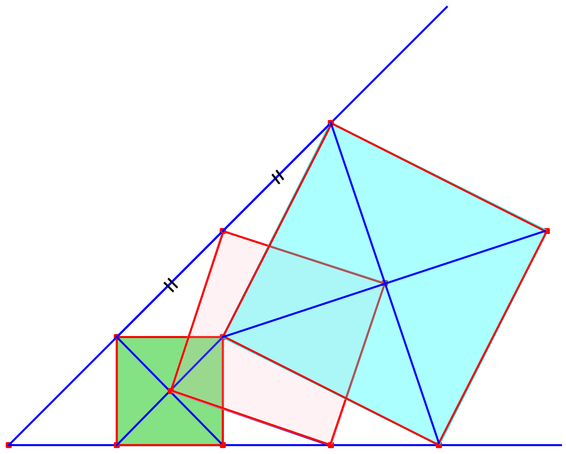
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°, \overline{AC} = 8, \overline{AB} = 6$

Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AED}, E = 90°$
$\angle EAD = 45°$
Siga K la intersecció de $\overline{AE}, \overline{BC}$
Siga L la projecció de K sobre $\overline{AB}$
Siga $x = \overline{AL} = \overline{LK}$
$\overline{BL} = 6 - x$

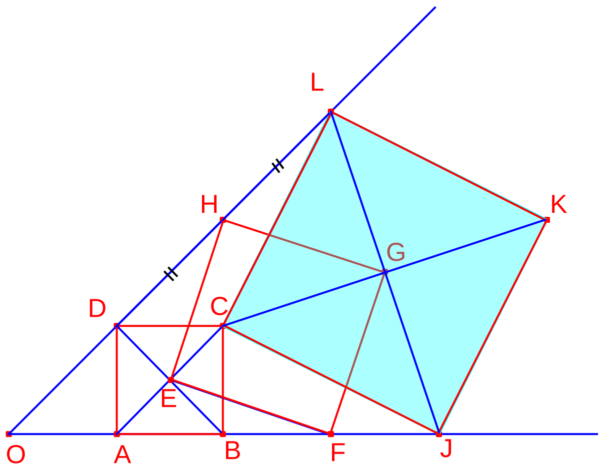


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{LBK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{x}{6-x} = \frac{8}{6}$$
Resolent l'equació:
$$x = \frac{24}{7}$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABK}$ és:
$$S_{ABK} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot x = \frac{72}{7}$$

3918.- La figura està formada per tres quadrats.
El verd té àrea 2, el rosa àrea 5.
Calculeu l'àrea del triangle blau.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = \sqrt{2}$
Siga el quadrat $EFGH$ de costat $\overline{EF} = \sqrt{5}$
Siga el quadrat $CJKL$ de costat $\overline{CJ} = c$
Siguen $\overline{AF} = x, \overline{DH} = \overline{HL} = y, \angle AEF = \alpha$
$\overline{AE} = 1, \angle EAB = 45°$



aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AEF}$:

$$5 = 1 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$x = 2\sqrt{2}$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AEF}$:

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{\sin 45°}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{DEH}$:

$y^2 = 5 + 1 - 2\sqrt{5}\cos(180° - \alpha)$
$y = 2$

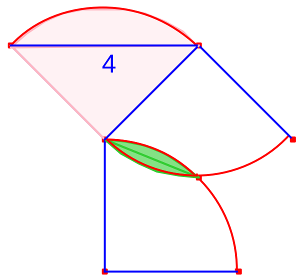
Notem que el triangle $\overset{\Delta}{DEH}$ és rectangle.
$\angle HDC = 45°$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{DCL}$:

$$c^2 = 2 + 16 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 10$$

L'àrea del quadrat $CJKL$ és:
$S_{CJKL} = c^2 = 10$

3919.- La figura està formada per tres quadrants iguals.
Calculeu la diferència entre les àrees rosa i verda.



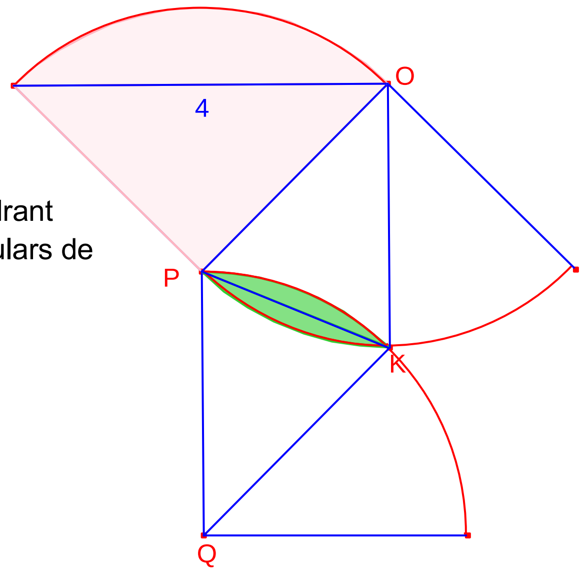
Solució:
Siguen els quadrants de centres O, P, Q i radi

$\overline{OP} = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

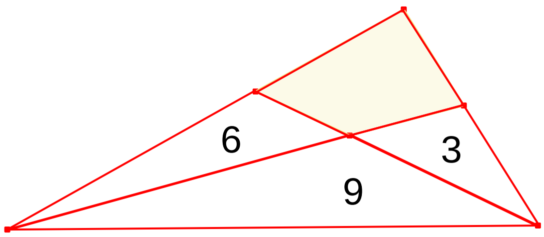
$\angle OPQ = 135°, \angle POQ = 45°$

La diferència d'àrees és igual a l'àrea d'un quadrant de radi $2\sqrt{2}$ menys l'àrea de dos segments circulars de 45º i radi $2\sqrt{2}$

$S = 2 \cdot S_{OPK} = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$



3920.- Un triangle s'ha dividit en tres triangles d'àrees $6, 9\ i\ 3$ i un quadrilàter.
Calculeu l'àrea del quadrilàter.



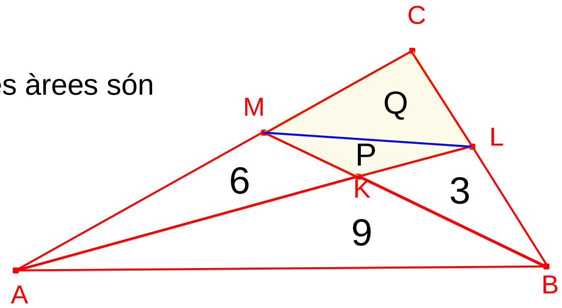
Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

Siga $S_{AMK} = 6, S_{ABK} = 9, S_{KBL} = 3$

Siga $S_{MKL} = P, S_{MLB} = Q$

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases:



$\frac{P}{6} = \frac{3}{9}$

$P = 2$

$\frac{S_{AML}}{S_{CML}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{CL}}, \frac{6+2}{Q} = \frac{\overline{AM}}{\overline{CL}}$

$\frac{S_{AMB}}{S_{CMB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{CL}}, \frac{6+9}{Q+5} = \frac{\overline{AM}}{\overline{CL}}$

$\frac{8}{Q} = \frac{15}{Q+5}$

Resolent l'equació:

$Q = \frac{40}{7}$

L'àrea del quadrilàter $CMKL$ és:

$S_{CMKL} = P + Q = 2 + \frac{40}{7} = \frac{54}{7}$