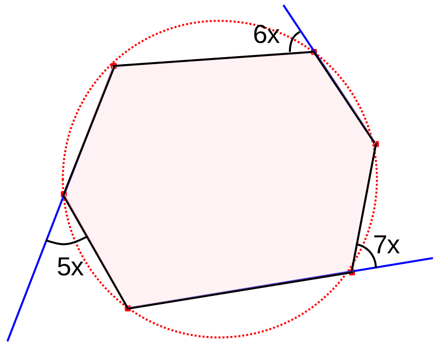
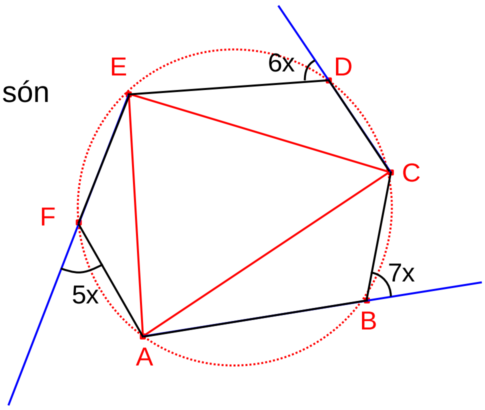
3921.- Un hexàgon està inscrit en una circumferència.
Calculeu el valor x



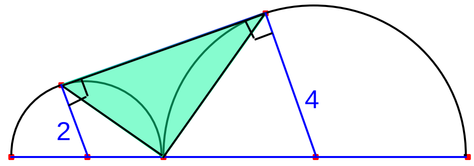
Solució:

Siga l'hexàgon $ABCDEF$ inscrit en la circumferència.
$\angle ABC = 180° - 7x, \angle CDE = 180° - 6x, \angle EFA = 180° - 5x$

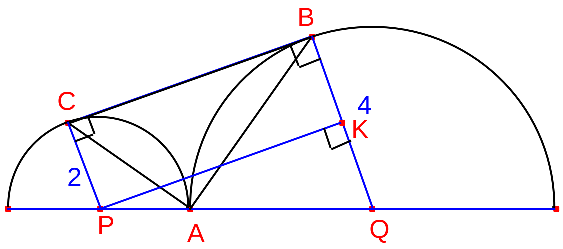


El quadrilàter $ABCE$ és cíclic, aleshores, els angles oposats són suplementaris:
$\angle AEC = 7x$
Anàlogament:
$\angle ACE = 5x, \angle EAC = 6x$
La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{ACE}$ és 180º:
$7x + 5x + 6x = 180°$
Resolent l'equació:
$x = 10°$

3922.- S'ha traçat el segment de tangència de dues semicircumferències tangents de radis 2 i 4, respectivament.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



Siga la semicircumferència de centre P i radi $\overline{PA} = \overline{PC} = 2$
Siga la semicircumferència de centre Q i radi $\overline{QA} = \overline{QB} = 4$
Siga K la projecció de P sobre$\overline{QB}$
Siga $x = \overline{BC} = \overline{PK}$

aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKQ}$:

$6^2 = x^2 + 2^2$

$x = 4\sqrt{2}$

Siga $\alpha = \angle PQK$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{3}, \sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Siga $\overline{AB} = c$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AQB}$

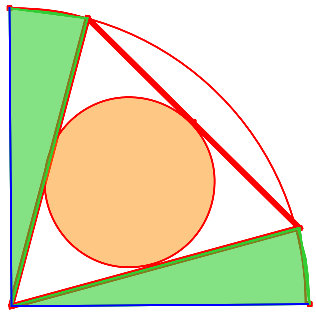
$c^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4^2 \cdot \dfrac{1}{3}$

$c = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}xc \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2}\dfrac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

3923.- La figura està formada per un quadrant un triangle equilàter i un cercle inscrit en el triangle. Si la suma de les àrees dels sectors verds és 12π, calculeu l'àrea del cercle.

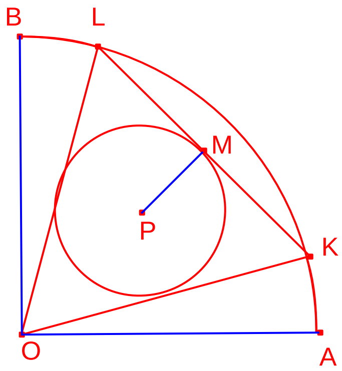


Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = r$
Els dos sectors ombrejats formen un sector de 30º

$S_{30°} = \frac{1}{12}\pi r^2 = 12\pi$

simplificant:

$r^2 = 144$



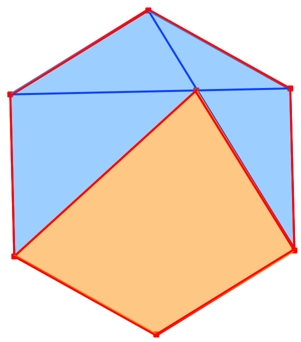
Siga el cercle de centre P i radi $s = \overline{PM}$ inscrit en el triangle equilàter $\overset{\Delta}{OKL}$

$\overline{PM} = \frac{1}{3}\overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{6}r$

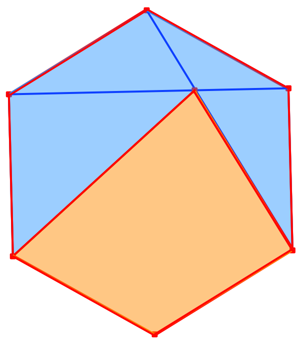
L'àrea del cercle és:

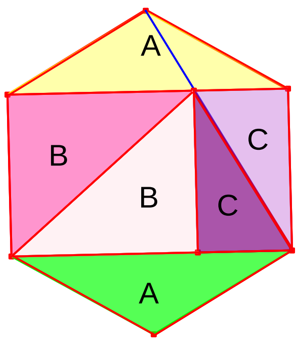
$S_P = \pi s^2 = \pi \frac{1}{2} r^2 = 12\pi$

3924.- Un hexàgon regular conté un quadrilàter taronja.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea de l'hexàgon regular.



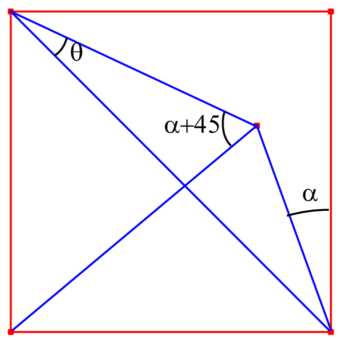
Solució:





[Blau]/[Total]=1/2

3925.- La figura està formada per un quadrat, una diagonal i tres segments que es tallen en un punt. Proveu que $\alpha = \theta$



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
siga $\overline{AP} = a$
$\angle ABP = 45° - \alpha, \angle APB = 90° - \theta$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ADP}$:

$$\frac{a}{\sin(45° + \theta)} = \frac{1}{\sin(45° + \alpha)}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABP}$:

$$\frac{a}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{1}{\sin(90° - \alpha)}$$

Dividint ambdues expressions:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin(45° + \theta)} = \frac{\cos\theta}{\sin(45° + \alpha)}$$

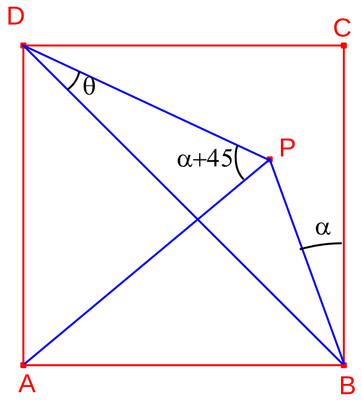
$$\sin(45° + \alpha) \cdot \cos\alpha = \sin(45° + \theta) \cdot \cos\theta$$

$$\sin 45° + \sin(45° + 2\alpha) = \sin 45° + \sin(45° + 2\theta)$$

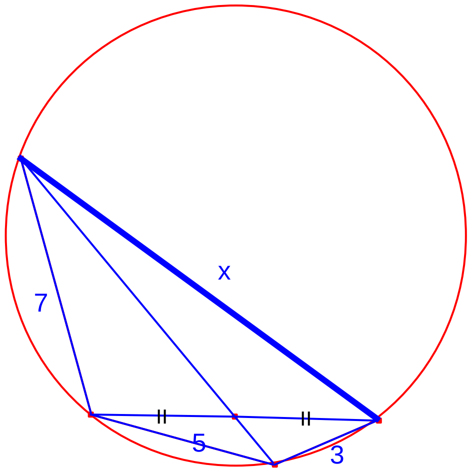
$$\sin(45° + 2\alpha) = \sin(45° + 2\theta)$$

$$\alpha = \theta$$

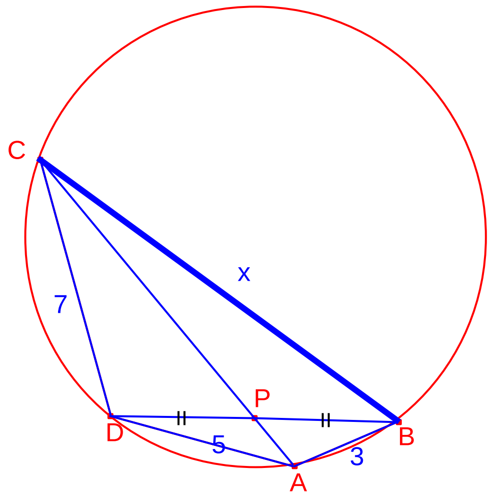
O bé, $\alpha = 45° - \theta$



3926.- En un quadrilàter cíclic es coneixen tres costats que mesuren 7, 5, 3
Calculeu la mesura de l’altre costat x

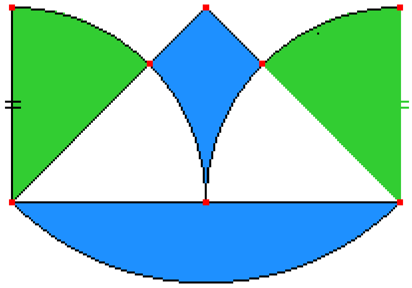


Solució:
Siga el quadrilàter inscriptible $ABCD$, $\overline{AB}=3, \overline{AD}=5, \overline{CD}=7, \overline{BC}=x$
Siga P la intersecció de les diagonals, tal que P és el punt mig de $\overline{BD}$
Siguen $\overline{PD}=\overline{PB}=a, \overline{PC}=y, \overline{PA}=z$

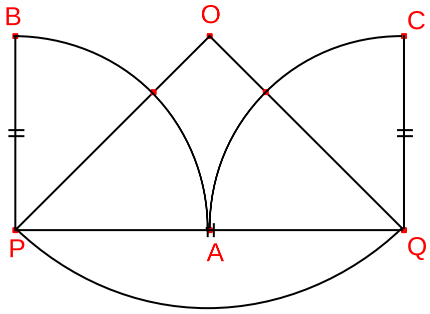


Els triangles $B\overset{\Delta}{P}C, A\overset{\Delta}{P}D$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{x}{5}=\frac{y}{a}$$
Els triangles $B\overset{\Delta}{P}A, C\overset{\Delta}{P}D$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{3}{7}=\frac{z}{a}$$
Multiplicant les dues expressions:
$$\frac{3x}{35}=\frac{yz}{a^2}$$
Aplicant la potència del punt P respecte de la circumferència:
$$yz=a^2$$
Aleshores:
$$x=\frac{35}{3}$$

3927.- La figura està formada per tres quadrants dos d'ells d'igual radi.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea verda.

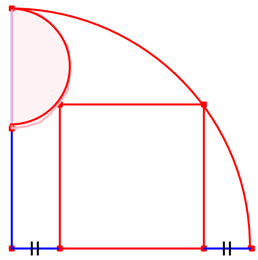


Solució:
Siga el quadrant de centre P i radi $\overline{PA} = 1$
Siga el quadrant de centre Q i radi $\overline{QA} = 1$
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OP} = \sqrt{2}$
$\angle POQ = 45°$
La zona verda és igual a l'àrea d'un quadrant de radi 1:
$S_{verda} = \frac{1}{4}\pi 1^2 = \frac{\pi}{4}$

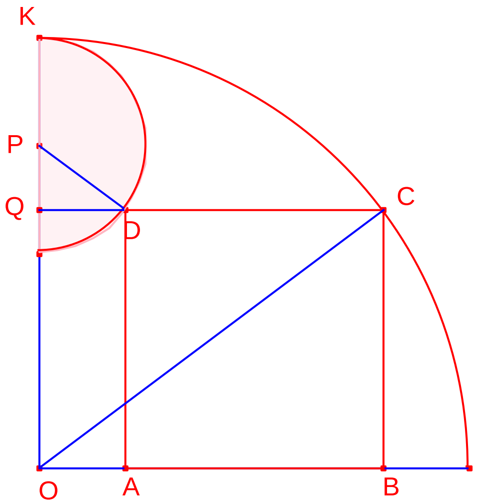


La zona blava és igual a l'àrea d'un quadrant de radi $\sqrt{2}$ menys l'àrea d'un quadrant de radi 1:
$S_{blava} = \frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\pi 1^2 = \frac{\pi}{4}$
Les àrees són iguals.

3928.- La figura està formada per un quadrant i en el seu interior un quadrat i un semicercle.
Calculeu la proporció entre l'àrea del semicercle i l'àrea del quadrant.



Solució:



OK=1

AB=c

Teorema Pitàgores OBC

$1=c^2+(1+c)^2/4$

$c=3/5$

PD=r

PQ1-r-c=2/5-r

OA=1/5

Teorema Pitàgores PQD

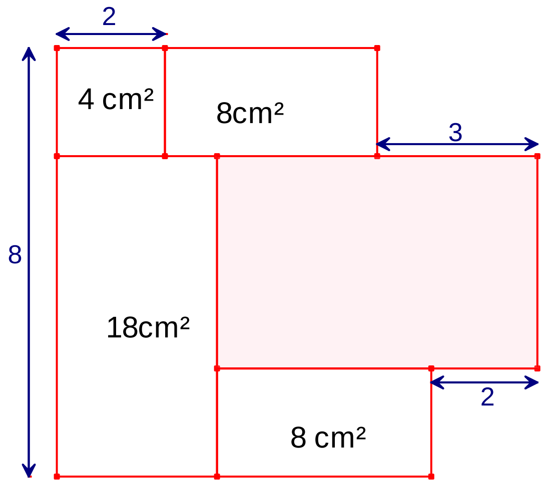
$r^2=1/25+(2/5-r)^2$

$r=1/4$

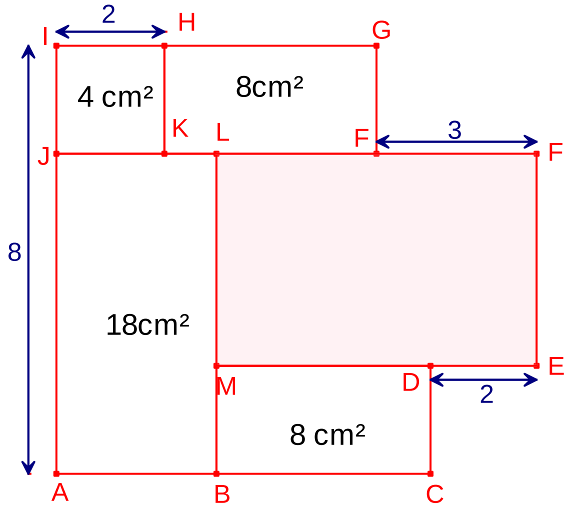
Proporció:

$(1/2)r^2/(1/4)=1/8$

3929.- Calculeu l'àrea del rectangle ombrejat.



Solució:

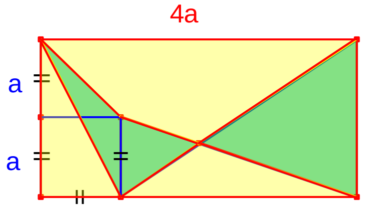


IJ=FG=JK=2
AJ=6
GH=FK=8/2=4
AB=18/6=3

FJ=6
LF=6-3=3

MD=6-2=4
CD=BM=8/4=2
ML=6-2=4
[MEFL]=6·4=24

3930.- En el rectangle de la figura calculeu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea groga.



Solució:
Siga el rectangle $ACDE$ de costats $\overline{AB} = 4a, \overline{AE} = 2a$

$S_{BGE} = \frac{1}{2}a^2$

Els triangles $\overset{\Delta}{BGP}, \overset{\Delta}{DCP}$ de raó $1:2$

Siga M la projecció de P sobre $\overline{BG}$

Siga N la projecció de P sobre $\overline{CD}$

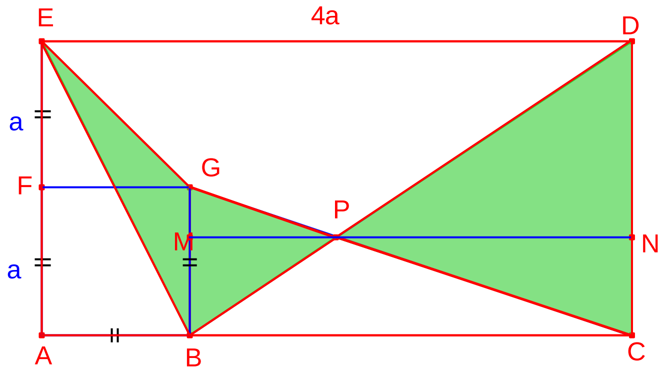
$\overline{PM} = \frac{1}{2}\overline{PN}$

$\overline{BC} = 3a = \overline{PM} + \overline{PN}$

$\overline{PM} = a$

$S_{BGP} = \frac{1}{2}a^2, S_{DCP} = 4 \cdot S_{BGP} = 2a^2$

$S_{verda} = S_{BGE} + S_{BGP} + S_{DCP} = 3a^2$



L'àrea groga és:

$S_{groga} = S_{ACDE} - S_{verda} = 8a^2 - 3a^2 = 5a^2$

La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{verda}}{S_{groga}} = \frac{3a^2}{5a^2} = \frac{3}{5}$$