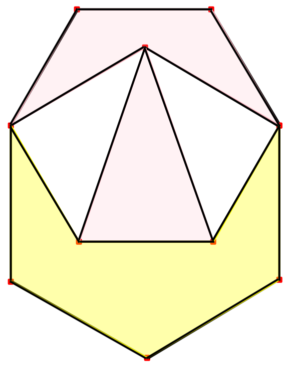
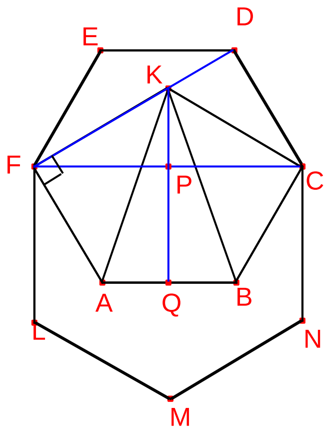
# Problemes de Geometria per a l'ESO 394

3931.- La figura està formada per dos hexàgons regulars.
Calculeu la proporció entre l'àrea rosa i l'àrea groga.



Solució:




Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 2$
Siga l'hexàgon regular $LMNCKF$ de costat $\overline{LM} = c$

$\overline{FC} = 4 = c\sqrt{3}$

$c = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\overline{PK} = \frac{1}{2}c = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \overline{PQ} = \sqrt{3}$

$\overline{QK} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

L'àrea rosa és:

$$S_{rosa} = S_{ABCDEF} - 2 \cdot S_{AFK} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} 2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

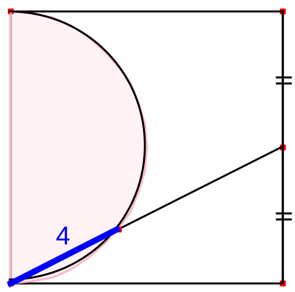
L'àrea groga és:

$$S_{groga} = S_{LMNCKF} - 2 \cdot A_{AFK} - S_{ABK} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{8\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} 2 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{11\sqrt{3}}{3}$$

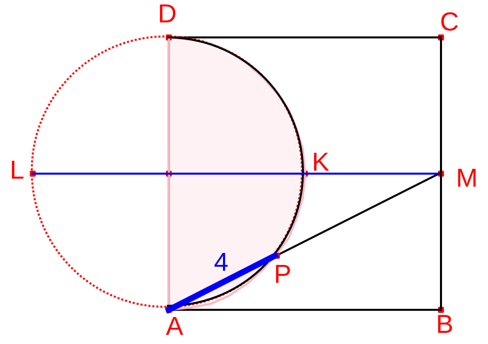
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{rosa}}{S_{groga}} = \frac{\frac{10\sqrt{3}}{3}}{\frac{11\sqrt{3}}{3}} = \frac{10}{11}$$

2932.- Sobre un costat d'un quadrat s'ha dibuixat una semicircumferència interior al quadrat.
Calculeu la seua àrea.




Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga $M$ el punt mig del costat $\overline{BC}$
Siga el semicercle de diàmetre $\overline{AD}$
siga $P$ la intersecció del semicercle i el segment $\overline{AM}$
$\overline{AP} = 4$
Siga $\overline{PM} = x$




Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

$$(x+4)^2 = c^2 + \frac{1}{4}c^2$$

$$(x+4)^2 = \frac{5}{4}c^2$$

Aplicant la potència de $M$ respecte de la circumferència de diàmetre $\overline{AD}$:

$$\overline{MP} \cdot \overline{MA} = \overline{MK} \cdot \overline{ML}$$

$$x(x+4) = \frac{1}{2}c \cdot \frac{3}{2}c$$

$$x(x+4) = \frac{3}{4}c^2$$

Dividint ambdues expressions:

$$\frac{x+4}{x} = \frac{5}{3}$$

Resolent l'equació:

$$x = 6$$

$$c^2 = 80$$

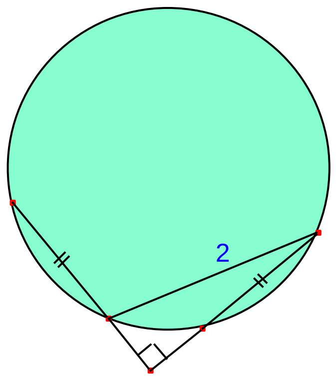
El radi de la semicircumferència és:

$$\frac{1}{2}c = 2\sqrt{5}$$

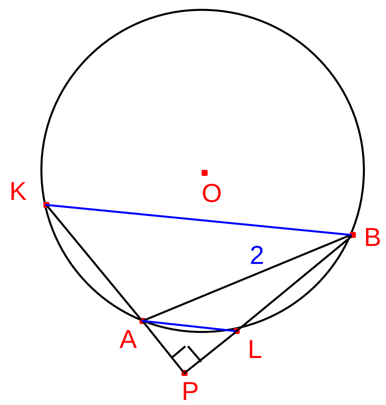
L'àrea del semicercle és:

$$S = \frac{1}{2}\pi\frac{1}{4}c^2 = 10\pi$$

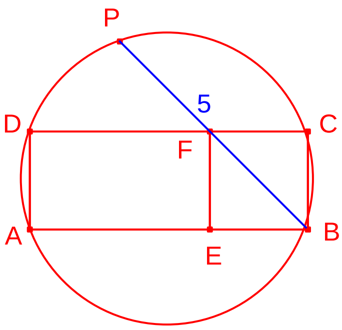
3933.- La figura està formada per una circumferència una corda que mesura 2 i dues cordes iguals que les seues extensions formen un angle recte.
Calculeu l'àrea del cercle.




Solució:
Siga la circumferència de centre $O$ i radi $\overline{OA} = R$
Siga la corda $\overline{AB} = 2$
Siguen les cordes $\overline{AK} = \overline{BL} = c$
Aplicant la potència de $P$ respecte de la circumferència:
$\overline{PA} \cdot \overline{PK} = \overline{PL} \cdot \overline{PB}$
$\overline{PA}(\overline{PA} + c) = \overline{PL}(\overline{PL} + c)$
$(\overline{PA} - \overline{PL})(\overline{PA} + \overline{PL} + c) = 0$
Aleshores, $\overline{PA} = \overline{PL}$
Per tant el triangle $\overset{\Delta}{KAB}$ és rectangle i isòsceles.
$\angle PKB = 45°$
El triangle $\overset{\Delta}{KAB}$ està inscrit en la circumferpencia.
aplicant el teorema dels sinus:
$$\frac{2}{\sin 45°} = 2R$$
$R = \sqrt{2}$
L'àrea del cercle és:
$S_O = 2\pi$



3934.- La figura està formada per una circumferència una corda $\overline{BP} = 5$, un rectangle $AEFD$ i un quadrat $BCFE$
Calculeu el perímetre màxim del rectangle $ABCD$.

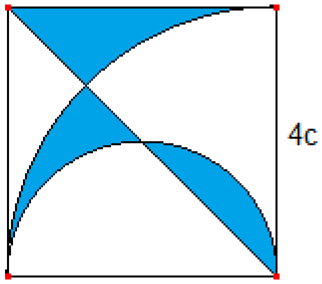



Solució:
Siga $\overline{BC} = \overline{CF} = a$ costats del quadrat.
Siga $\overline{AE} = \overline{FD} = b$ costats del rectangle.

El perímetre del rectangle $ABCD$ és:
$p = 4a + 2b$

Aplicant la potència del punt $F$ respecte de la circumferència:
$\overline{FC} \cdot \overline{FD} = \overline{FB} \cdot \overline{FP}$
$ab = a\sqrt{2}\left(5 - a\sqrt{2}\right)$
$b = \dfrac{5\sqrt{2}a - 2a^2}{a} = 5\sqrt{2} - 2a$
El perímetre és:
$p = 4a + 2b = 4a + 2\left(5\sqrt{2} - 2a\right) = 10\sqrt{2}$
El perímetre del rectangle $ABCD$ és constant.

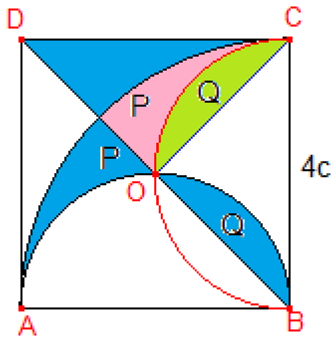
3935.- Donat el quadrat de costat $4c$, calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



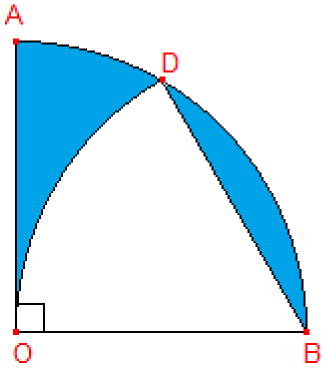

Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre $O$ i costat $\overline{AB} = 4c$

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CDO}$ que és la quarta part del quadrat $ABCD$.

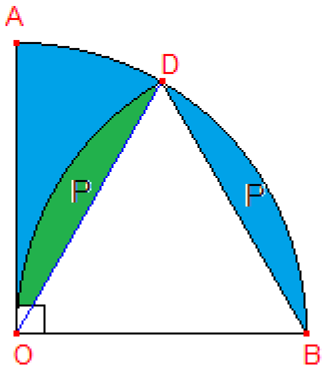
$S_{ombrejada} = \frac{1}{4}(4c)^2 = 4c^2$



3936.- La figura està formada per un quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OB} = R$ i un arc $\widehat{OD}$de centre $B$.




Solució:

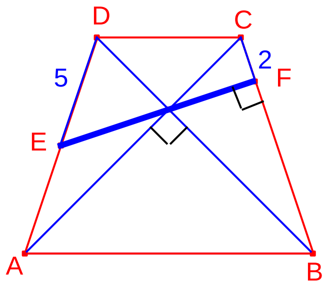



OMD equilàter

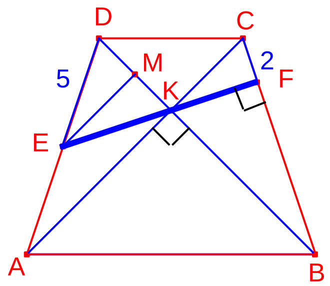
Arc OD= arc BD

[Ombrejada]=(1/12)Pi·R²

3937.- Siga el trapezi isòsceles $ABCD, \overline{AB} \parallel \overline{CD}$, de diagonals perpendiculars.
Siga $\overline{DE} = 5, \overline{CF}$ tal que $\overline{EF}$ passa per la intersecció de les diagonals.
Calculeu la mesura del segment $\overline{EF}$.




Solució:
Siga $K$ la intersecció de les diagonals.
$\overline{AK} = \overline{BK}, \overline{CK} = \overline{DK}$
$\angle KAB = \angle KBA = \angle KCD = \angle KDC = 45°$
Siga $\alpha = \angle ACB = \angle ADB$
$\angle DEF = 360° - \left(90° + 2(45° + \alpha)\right) = 180 - 2\alpha$
$\angle EKD = 180° - (\alpha + 180° - 2\alpha) = \alpha$
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{DEK}$ és isòsceles, $\overline{EK} = \overline{DE} = 5$



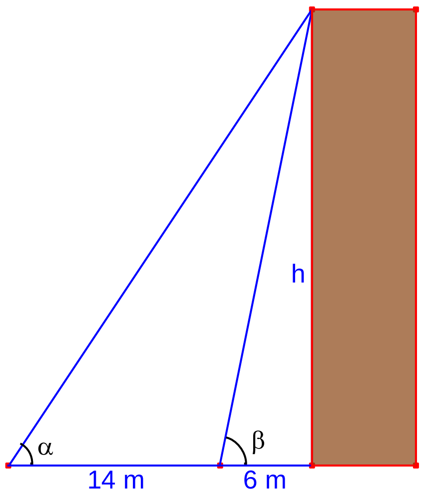

Siga $M$ el punt mig del segment $\overline{DK}$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EMD}, \overset{\Delta}{KFC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\frac{1}{2}\overline{DK}}{5} = \frac{2}{\overline{DK}}$$

$\overline{DK}^2 = 20$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KFC}$:
$\overline{KF} = 4$
Aleshores:
$\overline{EF} = \overline{EK} + \overline{KF} = 5 + 4 = 9$

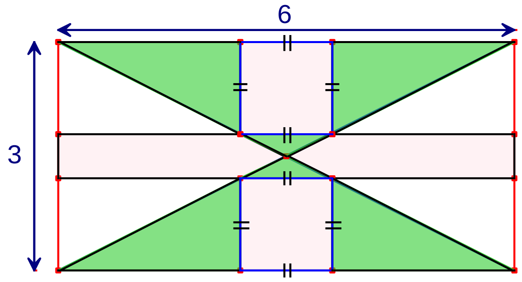
3938.- Un edifici des de dos punts es veuen sota dos angles $\alpha, \beta, \alpha + \beta = 135°$
Calculeu l'altura $h$ de l'edifici.



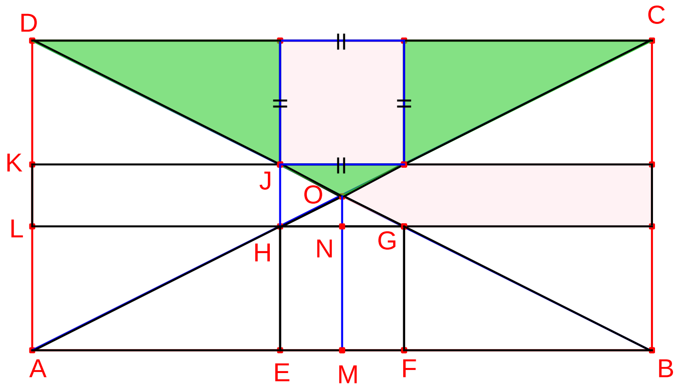

Solució:
$\beta = 135° - \alpha$

$$\tan\alpha = \frac{h}{20}$$
$$\tan\beta = \frac{h}{6}$$
$$\frac{-1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} = \frac{h}{6}$$
$$\frac{-1-\frac{h}{20}}{1+\frac{h}{20}} = \frac{h}{6}$$
Simplificant:
$h^2 - 26h - 120 = 0$
Resolent l'equació:
$h = 30\ m$

3939.- La figura està formada per un rectangle de costats 6, 3.
Calculeu la proporció entre l'àrea rosa i l'àrea verda.



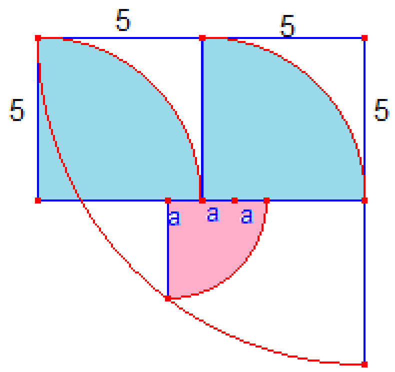

Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 6, \overline{AD} = 3$
Siga el quadrat $EFGH$ de costat $\overline{EF} = c$
Siga $M$ el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga $N$ el punt mig del costat $\overline{GH}$



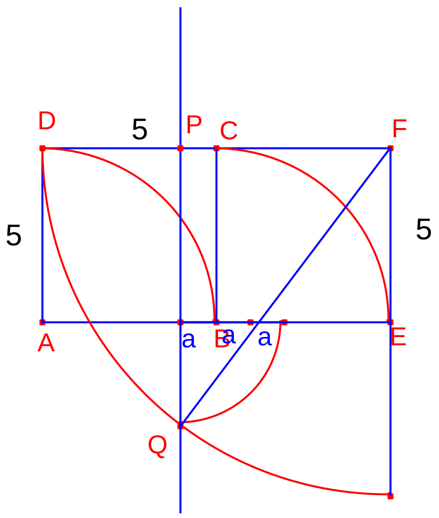

Els triangles $\overset{\Delta}{AEH}, \overset{\Delta}{ABC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{AE} = 2c$
$\overline{AM} = 3 = 2c + \frac{1}{2}c$
Resolent l'equació:
$c = \frac{6}{5}$
$\overline{ON} = \frac{3}{2} - c = \frac{3}{10}$
$\overline{KL} = \overline{HJ} = 2 \cdot \overline{ON} = \frac{3}{5}$
L'àrea rosa és:
$$S_{rosa} = 2(S_{EFGH} + S_{HJKL} + S_{HJO}) = 2\left(c^2 + \overline{KL} \cdot 2c + \frac{1}{2}\overline{HJ} \cdot \frac{1}{2}c\right) = \frac{153}{25}$$

L'àrea verda és:
$$S_{verda} = 2(S_{ABO} - S_{EFGH}) = 2\left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{3}{2} - c^2\right) = \frac{153}{25}$$
L'àrea verda i l'àrea rosa són iguals.
$S_{rosa} : S_{verda} = 1 : 1$

3940.- La figura està formada per quatre quadrants.
Calculeu la proporció entre l'àrea rosa i l'àrea blava.




Solució:




$FP=5a$

$PQ=5+3a$

$PQ=10$

Teorema Pitàgores FPQ

$100=(5+a)^2+(5+3a)^2$

$a=1$

$[Rosa]/[Blava]=(1/4)3^2/((1/2)5^2)=9/50$