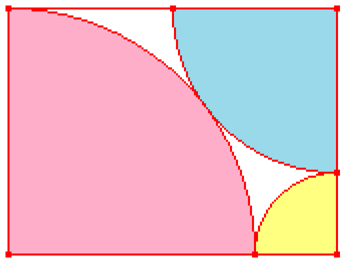
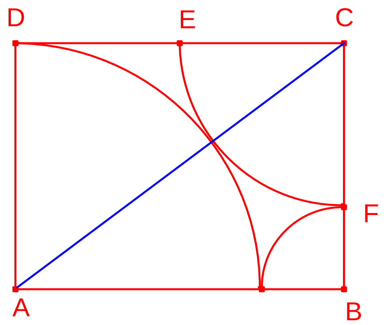
3941.- La figura està formada per un rectangle i tres quadrants.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del rectangle.



Solució:

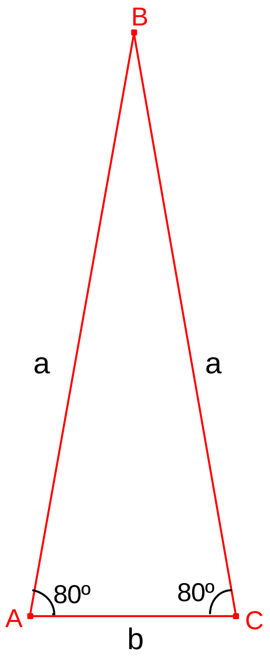


CE=r
AD=R
BF=R-r
AB=2R-r
AC=R+r
Teorema Pitàgores ABC
$(R+r)^2=R^2+(2R-r)^2$
$R=(3/2)r$
$[ABCD]=3r^2$
$[ombrejada]=Pi/4(7/2)\cdot r^2$

$[ombrejada]/[ABCD]=7\cdot PI/24$

3942.- En el triangle isòsceles de la figura proveu que:

$$\frac{a}{b}+\left(\frac{b}{a}\right)^2=3$$



Solució:

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{a}{\sin 80^\circ}=\frac{b}{\sin 20^\circ}$$

$$\sin 80^\circ=\sin(60^\circ+20^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ+\frac{1}{2}\sin 20^\circ$$

$$\frac{2a}{\sqrt{3}\cos 20^\circ+\sin 20^\circ}=\frac{b}{\sin 20^\circ}=\frac{2a-b}{\cos 20^\circ}$$

$$2\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}+1$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$b^2=2a^2-2a^2\cdot\cos 20^\circ$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2=2(1-\cos 20^\circ)$$

$$\frac{a}{b}+\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}-2\cos 20^\circ+2+\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ-2\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}+2+\frac{1}{2}=$$

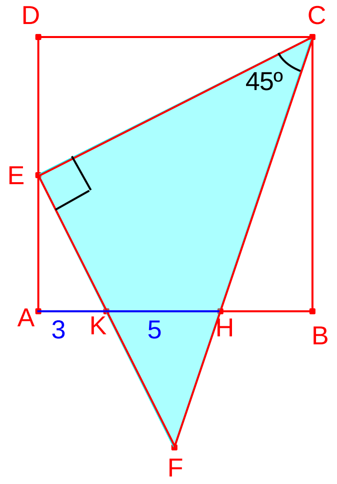
$$=\frac{\cos 20^\circ\cdot\cos 30^\circ-\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}+2+\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cos 10^\circ+\frac{1}{2}\cos 50^\circ-\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}+2+\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cos 10^\circ-\frac{1}{2}\cos 50^\circ}{\sin 20^\circ}+2+\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{\sin 30^\circ\cdot\sin 20^\circ}{\sin 20\,^\circ}+2+\frac{1}{2}=3$$

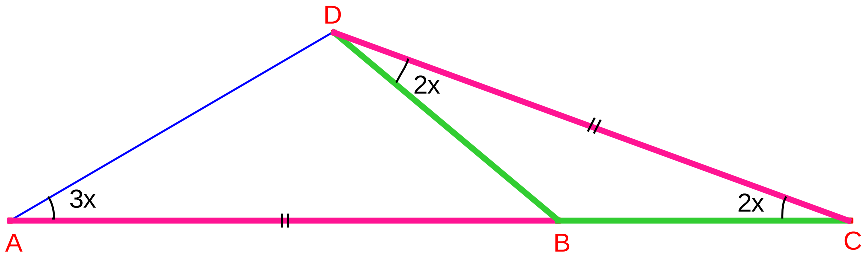
3943.- Donat el quadrat $ABCD$ calculeu l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{CEF}$



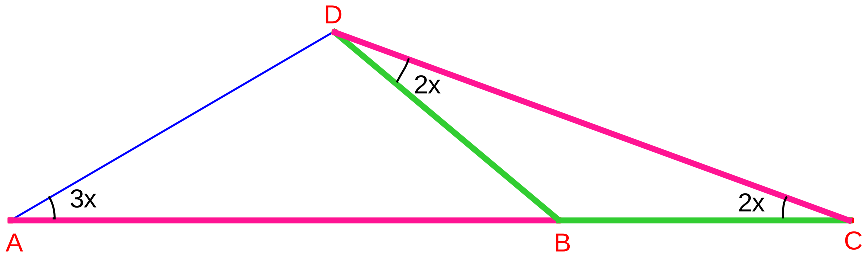
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga $\overline{AE} = b, \angle ECD = \angle AEK = \alpha$
$\angle HCB = 45° - \alpha$
$\overline{DE} = c - b, \overline{BH} = c - 8$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDE}, \overset{\Delta}{EAK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de tales:
$$\frac{3}{b} = \frac{c-b}{b}$$
$$3c = bc - b^2$$

$$\tan\alpha = \frac{3}{b}$$
$$\tan(45° - \alpha) = \frac{c-8}{c} = \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} = \frac{b-3}{b+3}$$
$$3c - 4b = 12$$
Resolent el sistema format per les dues equacions:
$$\begin{cases} 3c = bc - b^2 \\ 3c - 4b = 12 \end{cases}, \begin{cases} b = 6 \\ c = 12 \end{cases}$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDE}$:
$$\overline{CE}^2 = 12^2 + 6^2 = 180$$
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{CEF}$ és:
$$S_{CEF} = \frac{1}{2}\overline{CE}^2 = 90$$

3944.- En la figura calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



Siga $\overline{CD} = \overline{AB} = a, \overline{BC} = \overline{BD} = d$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$

$$\frac{a}{\sin 4x} = \frac{d}{\sin 2x}$$

$$\frac{a}{d} = 2 \cdot \cos 2x$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$

$$\frac{a}{\sin 7x} = \frac{d}{\sin 4x}$$

$$\frac{a}{d} = \frac{\sin 7x}{\sin 3x}$$

Igualant les expressions:

$$2 \cdot \cos 2x = \frac{\sin 7x}{\sin 3x}$$

$$2 \cdot \cos 3x \cdot \cos 2x = \sin 7x$$

$$\sin x + \sin 5x = \sin 7x$$

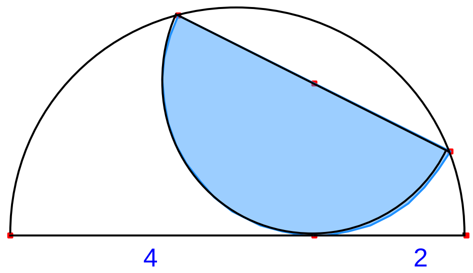
$$\sin x = \sin 7x - \sin 5x$$

$$\sin x = 2 \cdot \cos 6x \cdot \sin x$$

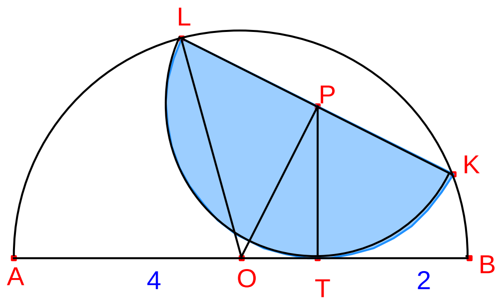
$$\cos 6x = \frac{1}{2}$$

$$x = 10°$$

3945.- La figura està formada per dos semicercles, l'exterior de diàmetre 6.
El punt de tangència de la interior amb el diàmetre de l'exterior divideix el diàmetre en dos segments de longituds 4 i 2.
Calculeu l'àrea del semicercle blau.



Solució:



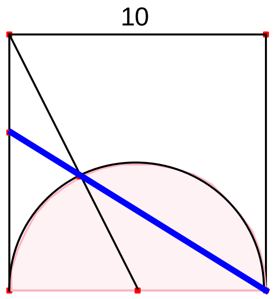
OA=OB=3
PT=PK=PL=r

OP=a

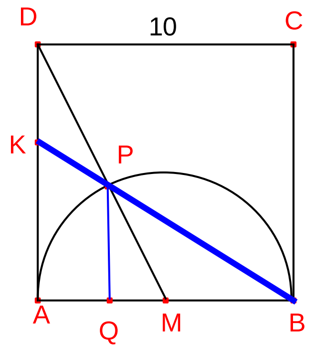
Teorema Pitàgores OTP, OPL
$a^2=1+r^2$
$9=a^2+r^2$

$r^2=4$
[Blava]=(1/2)Pi·r^2=2·Pi

3946.- Sobre el costat d'un quadrat de costat 10 s'ha dibuixat un semicercle com a diàmetre.
Calculeu la mesura del segment blau.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 10$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga P la intersecció de la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}$ i el segment $\overline{DM}$
Siga K la intersecció de la recta PB i el costat $\overline{AD}$
Siga Q la projecció de P sobre el costat $\overline{AB}$



$\overline{DM} = 5\sqrt{5}$

Els triangles rectangles $D\overset{\Delta}{A}M, P\overset{\Delta}{Q}M$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{\overline{PQ}}{5}$$

$\overline{PQ} = 2\sqrt{5}$

$$\overline{QM} = \frac{1}{2}\overline{PQ} = \sqrt{5}$$

Els triangles rectangles $K\overset{\Delta}{A}B, P\overset{\Delta}{Q}B$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

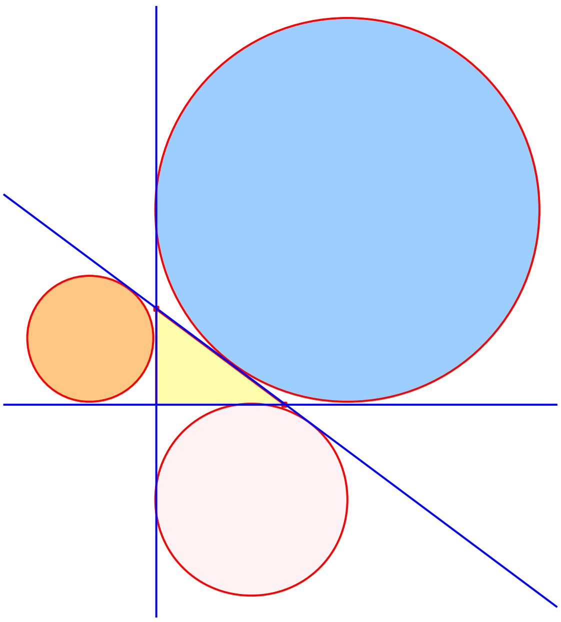
$$\frac{10}{5+\sqrt{5}} = \frac{\overline{AK}}{2\sqrt{5}}$$

$\overline{AK} = 5\left(\sqrt{5} - 1\right)$

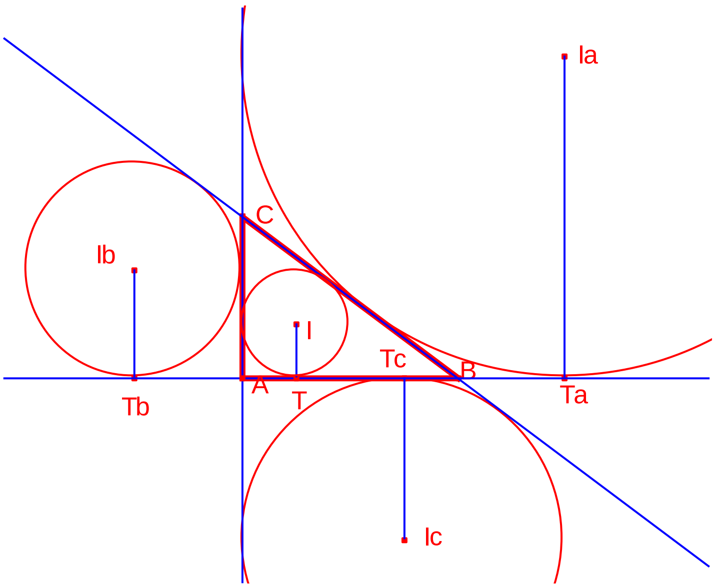
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $K\overset{\Delta}{A}B$:

$$\overline{BK} = 5\sqrt{2\left(5 - \sqrt{5}\right)} \approx 11.7557$$

3947.- El triangle rectangle ombrejat té costats
$3, 4, 5$
Calculeu l'angle de les tres circumferències.



Solució:



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, a = 5, b = 3, c = 4$
Les tres circumferències ombrejades són les circumferències exinscrites al triangle.
Siga la circumferència inscrita al triangle de radi $\overline{IT} = r$

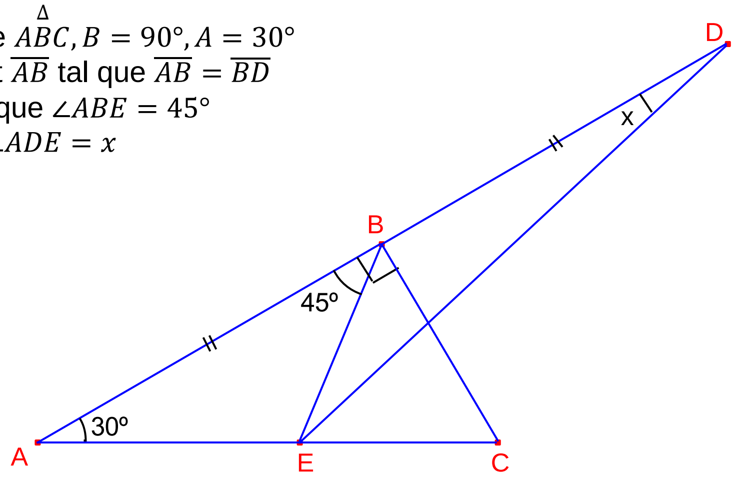
$$r = \frac{b + c - a}{2} = 1$$

Siguen les circumferències exinscrites de radis, $r_a = \overline{I_a T_a}, r_b = \overline{I_b T_b}, r_c = \overline{I_c T_c}$
Siga $p = \frac{a+b+c}{2}$

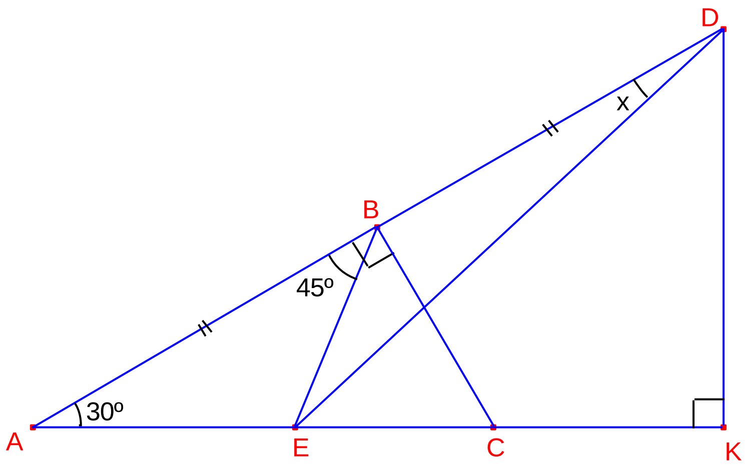
$$\frac{r_a}{r} = \frac{p}{p-a}, \frac{r_b}{r} = \frac{p}{p-b}, \frac{r_c}{r} = \frac{p}{p-c}$$

$$r_a = 6, r_b = 2, r_c = 3$$

3948.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, B = 90°, A = 30°$
Siga D en la extensió del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{AB} = \overline{BD}$
Siga E en la hipotenusa $\overline{AC}$ tal que $\angle ABE = 45°$
Calculeu la mesura de l'angle $\angle ADE = x$



Solució:



Siga K la projecció de D sobre la recta AC.
Siga $\overline{AB} = \overline{BD} = c$

$\overline{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}c, \overline{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}c$

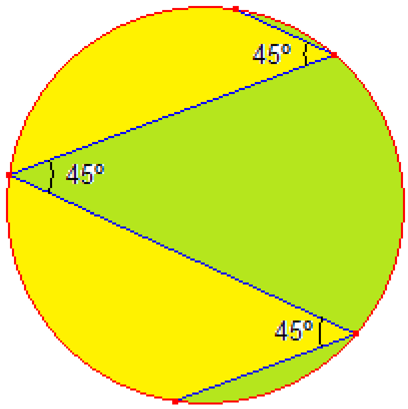
$\angle ABE = 45°$ és bisectriu de l'angle recte del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Aplicant la propietat de la bisectriu:

$$\frac{\overline{AE}}{c} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}c - \overline{AE}}{\frac{\sqrt{3}}{3}c} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} - 1$$

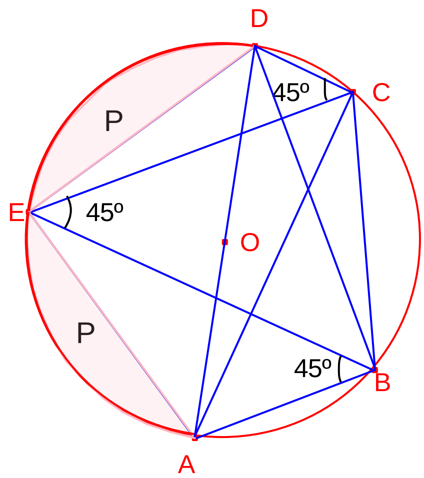
$\overline{AE} = \left(\sqrt{3} - 1\right)c$
$\overline{AK} = c\sqrt{3}, \overline{DK} = c, \angle ADK = 60°$
$\overline{EK} = \overline{AK} - \overline{AE} = c$

Aleshores, el triangle rectangle $\overset{\Delta}{EKD}$ és isòsceles.
$\angle EDK = 45°$
$x = \angle ADE = \angle ADK - \angle EDK = 60° - 45° = 15°$

3949.- Una circumferència mitjançant quatre cordes s’ha dividit en dues parts una groga i una verda.
Calculeu la proporció entre l’àrea groga i l’àrea verda.

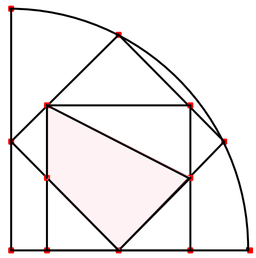


Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = 1$
$\overline{DE} = \overline{AE} = \sqrt{2}$
L’àrea del segment circular $\widehat{DE}$ és:
$P = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$
Siguen $\overline{AB} = a, \overline{BE} = b, \overline{CE} = c, \overline{CD} = d$

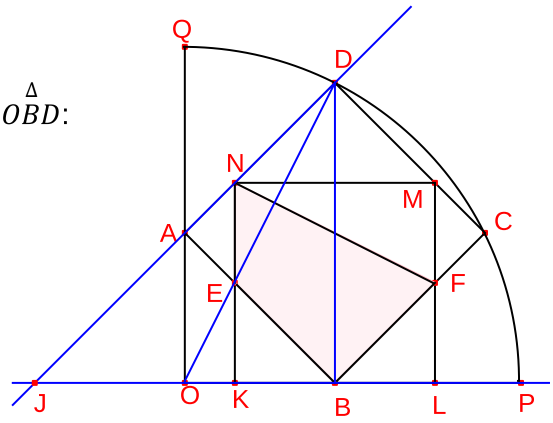


L’àrea groga és:
$$S_{groga} = 2P + \frac{1}{2}ab \cdot \sin 45° + \frac{1}{2}cd \cdot \sin 45° = 2P + \frac{\sqrt{2}}{4}(ab + cd)$$
Siguen $\angle AEB = \alpha, \angle CED = 45° - \alpha$
Aplicant el teorema del cosinus als triangles $\overset{\Delta}{ABE}, \overset{\Delta}{CDE}$:
$2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 45°$
$2 = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos 45°$
Sumant ambdues expressions:
$4 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - \sqrt{2}(ab + bc)$
El quadrilàter $ABCE$ és un trapezi isòsceles.
$\overline{AC} = \overline{BE} = b$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACD}$:
$b^2 + d^2 = 4$
El quadrilàter $BCDE$ és un trapezi isòsceles.
$\overline{BD} = \overline{CE} = c$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$a^2 + c^2 = 4$
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8$
$ab + bc = 2\sqrt{2}$
$$S_{groga} = 2P + \frac{\sqrt{2}}{4}(ab + cd) = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} 2\sqrt{2} = \frac{\pi}{2}$$
L’àrea groga és igual a mg cercle.
$S_{groga} = S_{verda}$

3950.- En un quadrant d'àrea 10π s'han inscrit dos quadrats.
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:
Siga el quadrant de centre O d'àrea 10π i radi $\overline{OP} = \overline{OQ} = 2\sqrt{10}$
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$



$\overline{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2}c, \overline{BD} = c\sqrt{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBD}$:
$40 = \left(2 + \frac{1}{2}\right)c^2$
Resolent l'equació:
$c = 4$

Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = d$
Siga J la intersecció de les rectes AD, OP.
$\overline{JB} = \overline{BD} = c\sqrt{2}$
$d = \overline{JK} = \overline{JB} - \frac{1}{2}d = c\sqrt{2} - \frac{1}{2}d$
Resolent l'equació:
$d = \frac{2\sqrt{2}}{3}c$
$\overline{KE} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$
L'àrea rosa és:
$S_{rosa} = S_{EBF} + S_{NEF} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}d\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}d \cdot d = \frac{1}{2}d^2 = \frac{64}{9}$