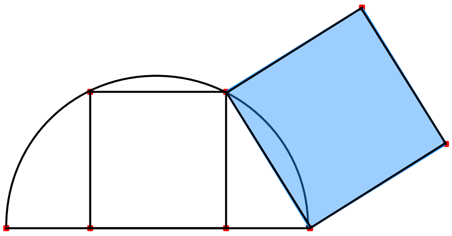
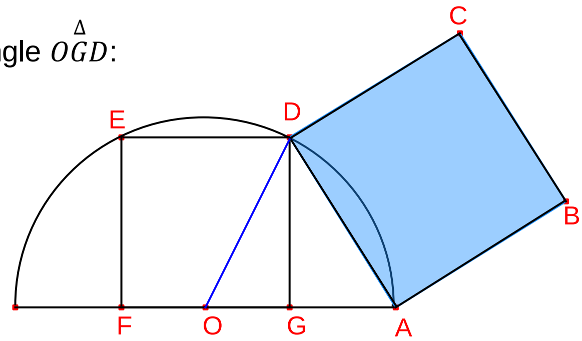
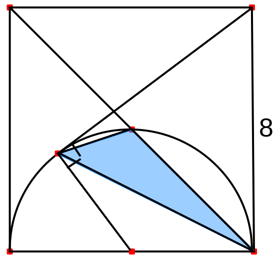
3951.- La figura està formada per una semicircumferència de radi 5 i dos quadrats.
Calculeu l'àrea del quadrat blau.



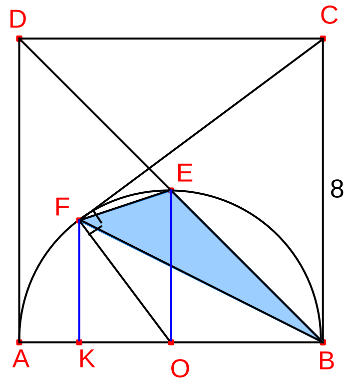
Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = 5$
Siga el quadrat blau $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 5$
Siga el quadrat $DEFG$ de costat $\overline{DE} = c$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OGD}$:
$25 = c^2 + \frac{1}{4}c^2$
$c = 2\sqrt{5}$
$\overline{GA} = 5 - \sqrt{5}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DGA}$:
$d^2 = c^2 + \left(5 - \sqrt{5}\right)^2 = 50 - 10\sqrt{5}$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = d^2 = 50 - 10\sqrt{5}$



3952.- La figura està formada per un quadrat de costat 8 i un semicercle amb el diàmetre sobre un costat. Calculeu l’àrea del triangle ombrejat.

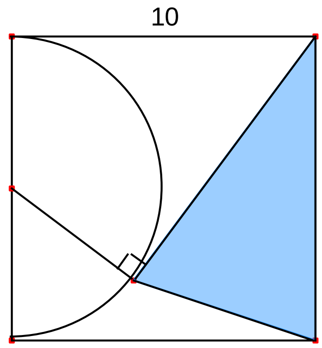


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 8$
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OA} = 4$
$\overline{BE} = 4\sqrt{2}$
Siga $\overline{BF} = x, \overline{OB} = 4\sqrt{5}$
El quadrilàter $OBDF$ és inscriptible.
aplicant el teorema de Tolomeu:
$8 \cdot 4 + 8 \cdot 4 = x \cdot 4\sqrt{5}$
$x = \frac{16}{\sqrt{5}}$
Siga $\alpha = \angle OBF = \angle OCF$
$\overline{CF} = \overline{CB} = 8, \overline{OF} = 4$

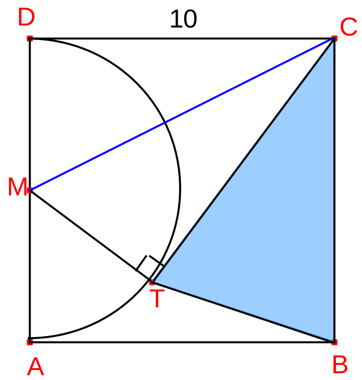


Aplicant raons trigonomètriques al triangle $\overset{\Delta}{OFC}$:
$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
L’àrea del triangle $\overset{\Delta}{BFE}$ és:
$$S_{BFE} = \frac{1}{2}x \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sin(45° - \alpha) = \frac{1}{2}\frac{16}{\sqrt{5}}4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{32}{5}$$

3953.- La figura està formada per un quadrat de costat 10 i un semicercle de diàmetre un costat del quadrat. Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.

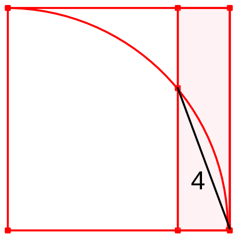


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 10$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$ centre de la semicircumferència.
Siga T el punt de tangència de la circumferència i la recta tangent que passa per C.
$\overline{CT} = 10$
Siga $\angle DCM = \alpha$
$\tan\alpha = \frac{1}{2}$
$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$
$\angle TCB = 90° - 2\alpha$

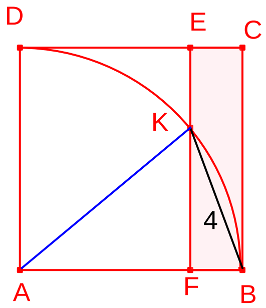


L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCT}$ és:
$$S_{BCT} = \frac{1}{2}10^2 \cdot \sin(90° - 2\alpha) = 50 \cdot \cos 2\alpha = 50(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 50\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\right) = 30$$

3954.- La figura està formada per un quadrat, un quadrant i una corda del quadrant de longitud 4.
Calculeu l'àrea del rectangle ombrejat.



Solució:



AB=c

BF=a, AF=c-a

Teorema Pitàgores AFK, BFK

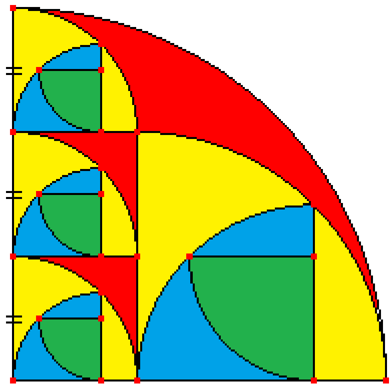
$c^2-(c-a)^2=4^2-a^2$

$2ac=16$

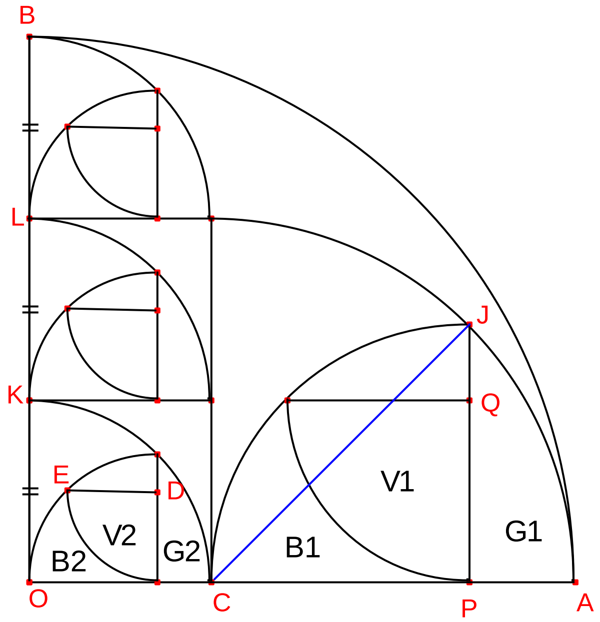
$[BCEF]=ac=8$

3955.- En la figura calculeu la proporció:

$$\frac{[verda]+[roja]}{[groga]+[blava]}$$



Solució:



Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA}=3$
Siga el quadrant de centre P i radi $\overline{PC}=r$
Siga el quadrant de centre Q i radi $\overline{QP}=s$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CPJ}$:

$4=2r^2, r=\sqrt{2}$

Per semblança:

$$s=\frac{\sqrt{2}}{2}r=1$$

Siga el quadrant de centre D i radi $\overline{DE}=t$

$$t=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{OK}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V_1=\frac{\pi}{4}1^2=\frac{\pi}{4}, V_2=\frac{1}{4}V_1=\frac{\pi}{16}$$

$$[verda]=V_1+3\cdot V_2=\frac{7}{16}\pi$$

$$B_1=\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2-V_1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}, B_2=\frac{1}{4}B_1=\frac{\pi}{16}$$

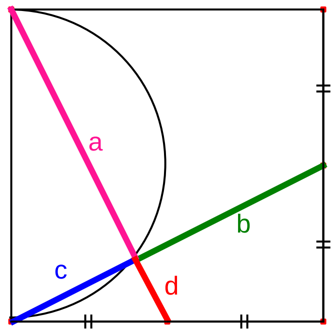
$$[blava]=B_1+3\cdot B_2=\frac{7}{16}\pi$$

$$[groga]=2[blava]=\frac{7}{8}\pi$$

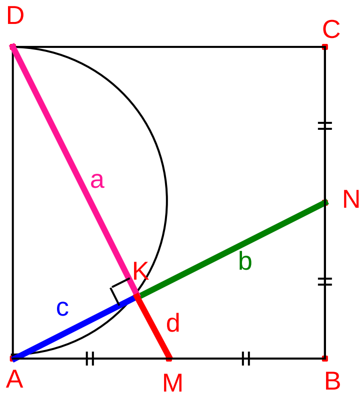
$$[roja]=\frac{\pi}{4}3^2-\left(\frac{\pi}{4}2^2+\frac{\pi}{4}1^2\right)=\frac{1}{2}\pi$$

$$\frac{[verda]+[roja]}{[groga]+[blava]}=\frac{\frac{7}{16}\pi+\frac{1}{2}\pi}{\frac{7}{8}\pi+\frac{7}{16}\pi}=\frac{5}{7}$$

3956.- La figura està formada per un quadrat un semicercle amb el diàmetre en un costat i dos segments
Calculeu les proporcions $a : b : c : d$



Solució:



K intersecció DM i semicircumferència

AngleAKD=90º

AngleAMD=x

AngleKAM=x

AngleNAB=x

A, K, N alineats

DM=AN

a+d=b+c

AKD, MKA, MAD semblants

a/c=1/2, c/d=1/2

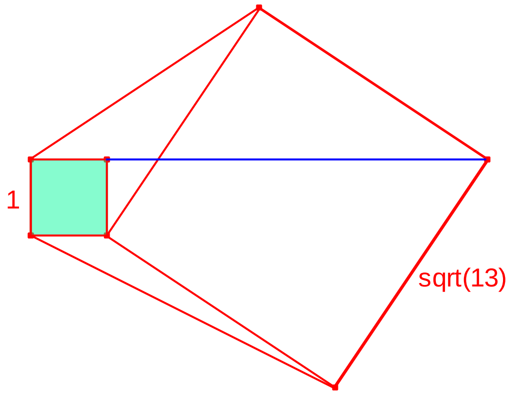
a=4d, c=2d

4d+d=b+2d

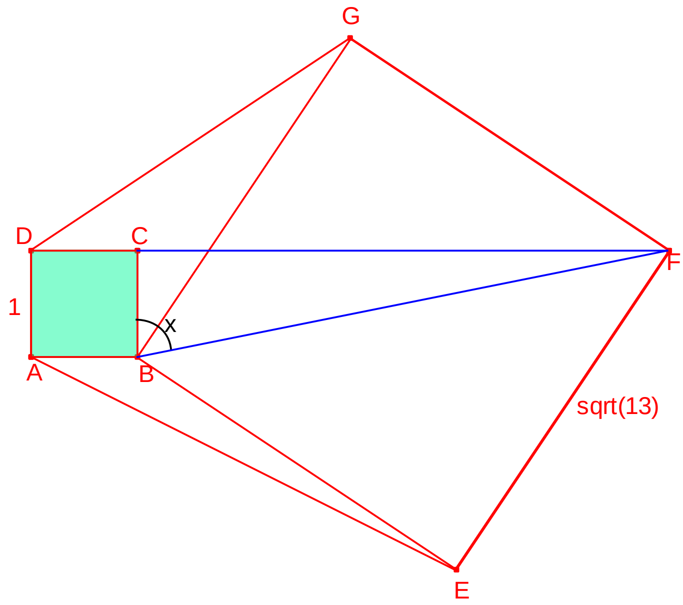
b=3d

a : b : c : d = 4 : 3 : 2 : 1

3957.- La figura està formada per dos quadrats de costats $1, \sqrt{13}$
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total.



Solució:

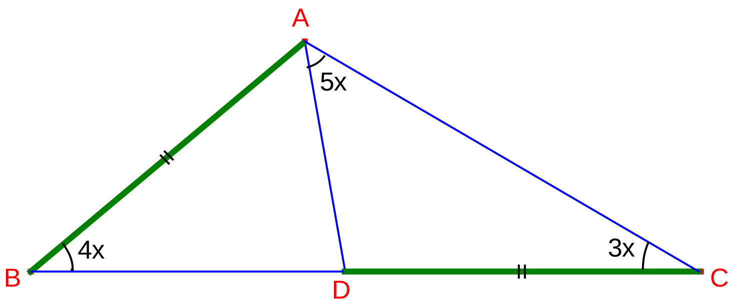


BF=sqrt(26)
CF=5
angleCBF=x
angleABE=225º-x
angleDFG=x-45º
[ABE]=(1/2)·sqrt(13)·sin(225º-x)=1
[BEF]=(1/2)13=13/2
[BCF]=(1/2)5=5/2
[DFG]=(1/2)6·sqrt(13)·sin(x-45º)=6

[AEFGD]=1+1+13/2+5/2+6=17

[ABCD]/[AEFGD]=1/17

3958.- En la figura, $\overline{AB} = \overline{CD}$
Calculeu el valor de l'angle x



Solució:
Siga $\overline{AB} = \overline{CD} = c, \overline{AD} = d$

Aplicant el teorema dels sinus als triangles $\overset{\Delta}{ABD}, \overset{\Delta}{ADC}$:

$$\frac{c}{\sin 8x} = \frac{d}{\sin 4x}$$

$$\frac{c}{\sin 5x} = \frac{d}{\sin 3x}$$

Dividint les dues expressions:

$$\frac{\sin 5x}{2 \cdot \cos 4x} = \sin 3x$$

$$\sin 5x = 2 \cdot \sin 3x \cdot \cos 4x$$

$$\sin 5x = \sin(-x) + \sin 7x$$

$$\sin x = \sin 7x - \sin 5x$$

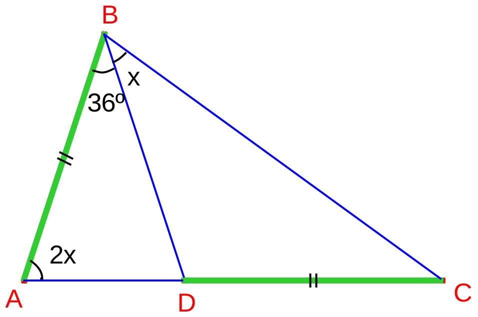
$$\sin x = 2 \cdot \cos 6x \cdot \sin x$$

$$\cos 6x = \frac{1}{2}$$

$$6x = 60°$$

$$x = 10°$$

3959.- En la figura, $\overline{AB} = \overline{CD}$
Calculeu el valor de l'angle x



Solució:
Siga $\overline{AB} = \overline{CD} = c, \overline{AD} = d$

Aplicant el teorema dels sinus als triangles $\overset{\Delta}{ABD}, \overset{\Delta}{ADC}$:

$$\frac{c}{\sin(144° - 2x)} = \frac{d}{\sin 2x}$$

$$\frac{c}{\sin x} = \frac{d}{\sin(144° - 3x)}$$

Dividint les dues expressions:

$$\frac{\sin x}{\sin(144° - 2x)} = \frac{\sin(144° - 3x)}{\sin 2x}$$

$$\sin x \cdot \sin 2x = \sin(144° - 2x) \cdot \sin(144° - 3x)$$

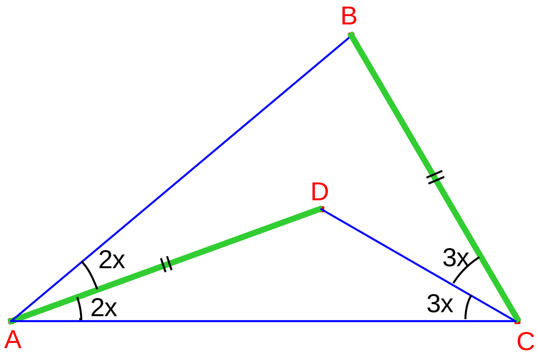
$$\cos x - \cos 3x = \cos x - \cos(288° - 5x)$$

$$\cos 3x = \cos(288° - 5x)$$

$$8x = 288°$$

$$x = 36°$$

3960.- En la figura, $\overline{BC} = \overline{BC}$
Calculeu el valor de l'angle x



Solució:
Siga $\overline{AD} = \overline{BC} = a, \overline{AC} = b$

Aplicant el teorema dels sinus als triangles $\overset{\Delta}{ACD}, \overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{b}{\sin 3x} = \frac{da}{\sin 3x}$$

$$\frac{b}{\sin 10x} = \frac{a}{\sin 4x}$$

Dividint les dues expressions:

$$\frac{\sin 10x}{\sin 5x} = \frac{\sin 4x}{\sin 3x}$$

$$2\cos 5x = \frac{\sin 4x}{\sin 3x}$$

$$\sin 4x = 2 \cdot \sin 3x \cdot \cos 5x$$

$$\sin 4x = \sin -2x - \sin 8x$$

$$\sin 2x = \sin 8x - \sin 4x$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \cos 6x \cdot \sin 2x$$

$$\cos 6x = \frac{1}{2}$$

$$6x = 60°$$

$$x = 10°$$