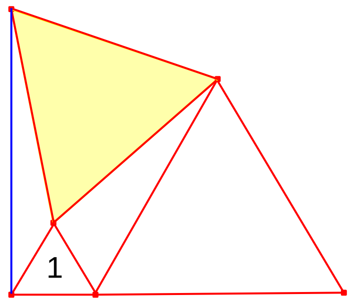
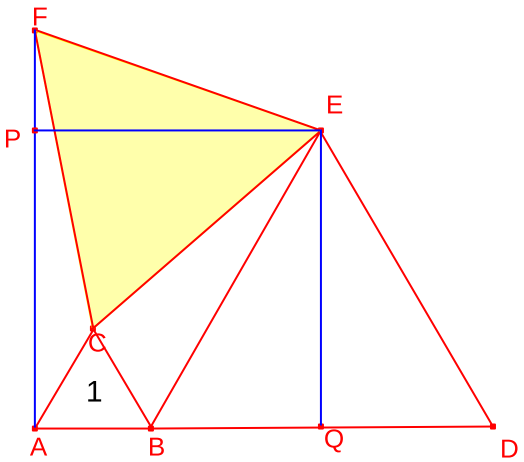
Problemes de Geometria per a l'ESO 397

3961.- La figura està formada per tres triangles equilàters.
El menut té àrea 1.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



AB=a, BD=b, CE=c

teorema cosinus BCE

$c^2=a^2+b^2-ac$

anglePED=120º

angle PEF=angleCEB=x

sin x =sqrt(c^2-(a+b/2))/c

Teorema Sinus BCE

sin x =a·sqrt(3)/(2c)

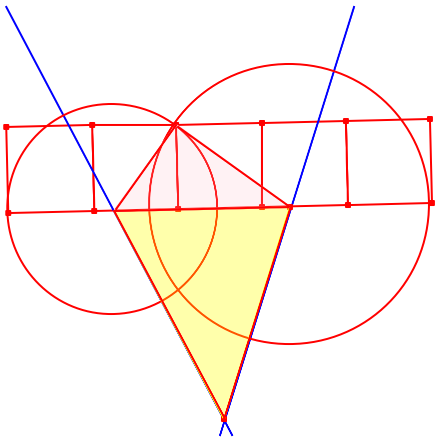
a·sqrt(3)/2=sqrt(c^2-(a+b/2))

$c^2=7a^2$

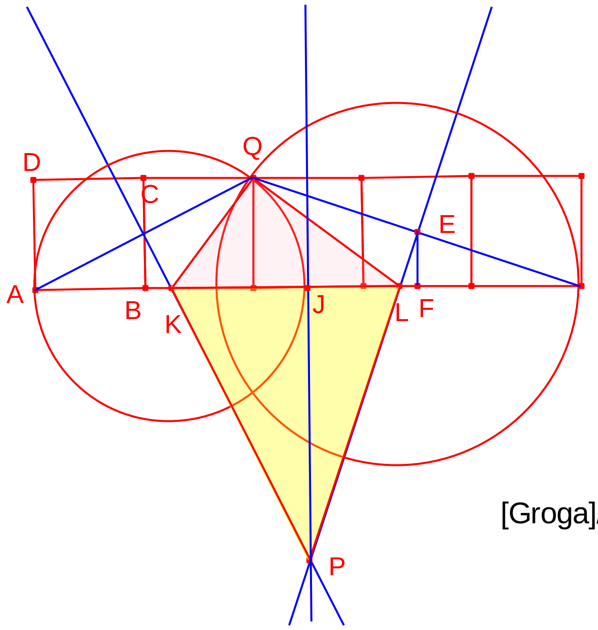
[CEF]/[ABC]=$(c/a)^2$=7

[CEF]=1

3962.- La figura està formada per cinc quadrats i dues circumferències.
Calculeu la proporció entre l'àrea groga i l'àrea rosa.



Solució:



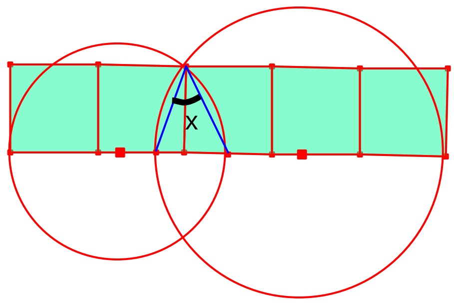
AB=2
BK=1/2
EF=1
LF=1/3
KL=25/3

PJ=h

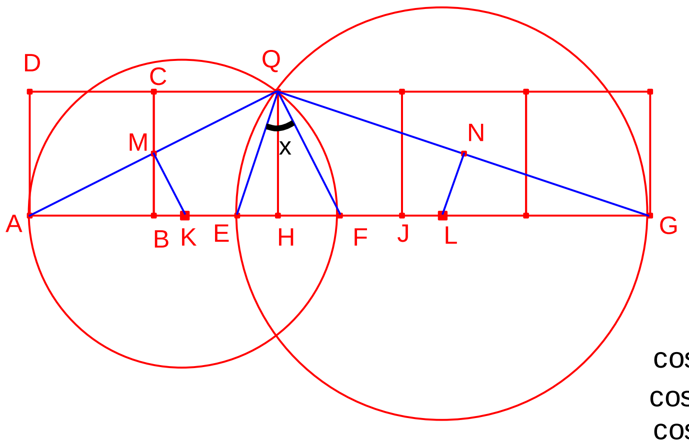
KJ=h/2
LJ=h/3
KJ=h/2+h/3=5h/2
h=5

[Groga]/[Rosa]=h/AD=5/2

3963.- La figura està formada per cinc quadrats i dues circumferències. Calculeu la mesura de l'angle x.



Solució:

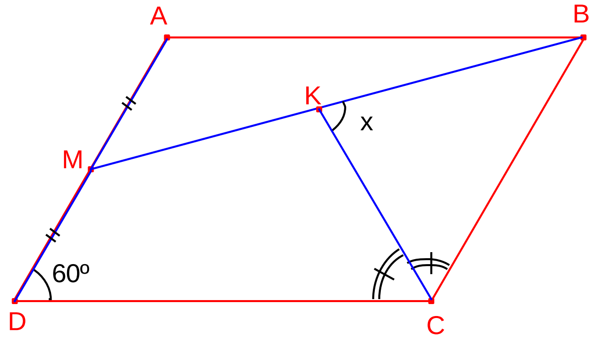


AB=2
BK=1/2
AF=5
AQ=2·sqrt(5)
QF=sqrt(5)
LJ=2/3
GE=20/3
GQ=2·sqrt(10)
GE=(2/3)sqrt(10)

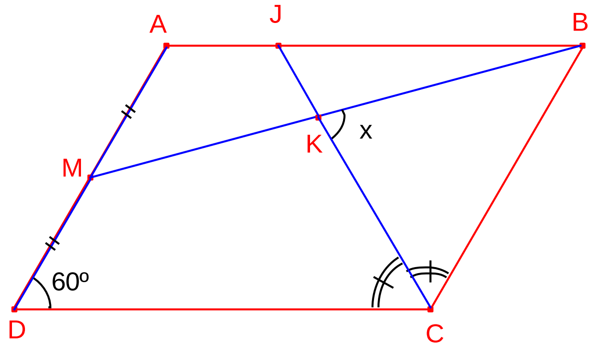
a=AngleEQH, b=AngleFQH

cos a =3/sqrt(10), cos a=1/sqrt(10)
cos b=2/sqrt(5), sin b= 1/sqrt(5)
cos(a+b)=sqrt(2)/2
x=a+b=45º

3964.- Siga el paral·lelogram $ABCD, D = 60°, \overline{AD} = 2, \overline{AB} = 1 + \sqrt{3}$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$
Siga K el punt del segment $\overline{BM}$ tal que
$\angle BCK = \angle DCK$
Calculeu la mesura de l'angle $x = \angle CKB$



Solució:

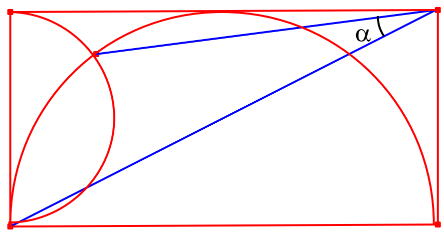


$\angle BCK = \angle DCK = \frac{1}{2} 120° = 60°$
Siga J la intersecció de les rectes CK, AB.
$\angle AJC = 120°$

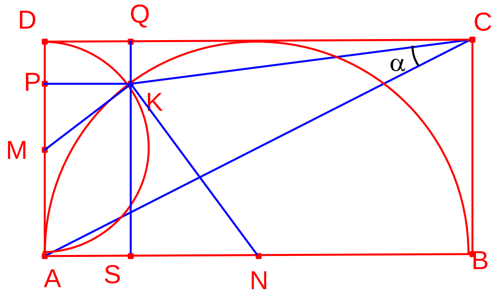
Siga $\beta = \angle AMB$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AMB}$:
$$\frac{1+\sqrt{3}}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin(120° + \beta)}$$
$$\frac{1+\sqrt{3}}{\sin\beta} = \frac{2}{\sqrt{3}\cos\beta - \sin\beta} = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos\beta}$$

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = 1$$
$\tan\beta = 1$
$\beta = 45°$
La suma dels angles del quadrilàter $AJKM$ és 360º:
$x + 120° + 120° + 45° = 360°$
$x = 75°$

3965.- Dins d'un rectangle sobre dos costats consecutius com diàmetres s'han dibuixat dues semicircumferències.
Calculeu el valor $\tan\alpha$



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 4, \overline{AD} = 2$
Siga K la intersecció de les dues semicircumferències.
Siga M el centre de la semicircumferència de diàmetre $\overline{AD}$
Siga N el centre de la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}$
Siga $\overline{PK} = x, \overline{QK} = y$



Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{MPK}, \overset{\Delta}{NSK}$

$1 = x^2 + (1-y)^2$

$4 = (2-x)^2 + (2-y)^2$

Resolent el sistema format per les dues equacions:

$$\begin{cases} x = \dfrac{4}{5} \\ y = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

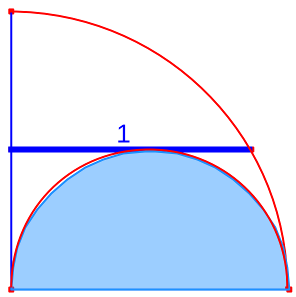
$$\overline{CQ} = \frac{16}{5}$$

Siguen $\beta = \angle QCK, \gamma = \angle ACB$

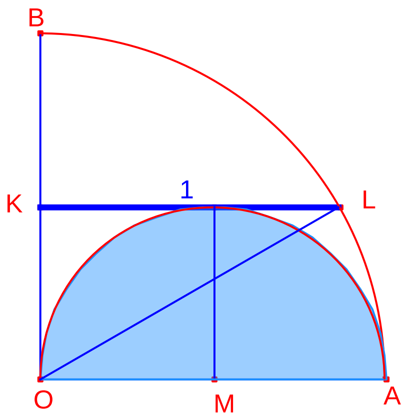
$$\tan\beta = \frac{1}{8}, \tan\gamma = 2$$

$$\tan\alpha = \tan(90° - (\beta+\gamma)) = \frac{1}{\dfrac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta \cdot \tan\gamma}} = \frac{1}{\dfrac{\frac{1}{8}+2}{1-\frac{1}{8}\cdot 2}} = \frac{6}{17}$$

3966.- La figura està formada per un quadrant i un semicercle.
Calculeu l'àrea del semicercle.



Solució:



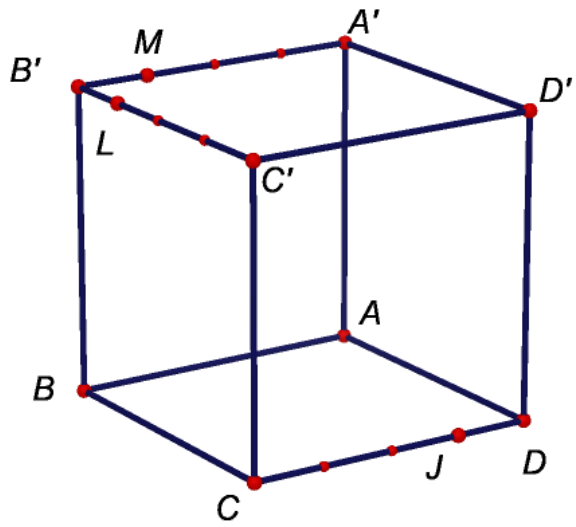
OM=r
OL=2r
OK=r

Teorema
Pitàogres OKL

$4r^2=r^2+1$
$r^2=1/3$

S=(1/2)Pi·r²=(1/6)Pi

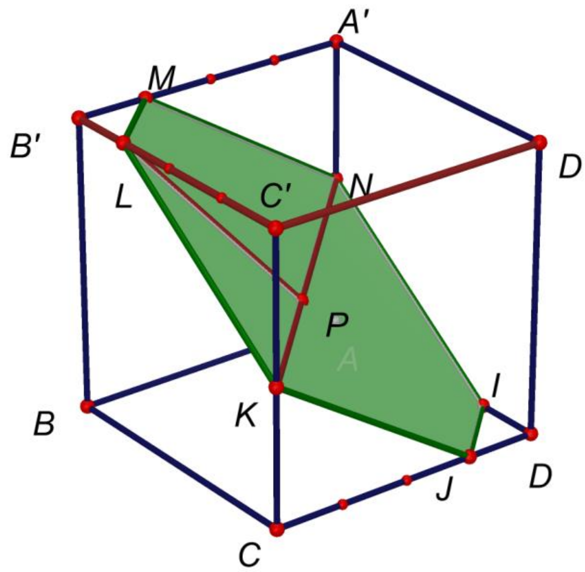
3967.- Siga el cub $ABCDA'B'C'D'$ d'aresta $\overline{AB} = 4$
Calculeu l'àrea de la secció del plànol determinada pels punts J, L, M de les arestes $\overline{CD}, \overline{B'C'}, \overline{A'B'}$, respectivament tals que $\overline{DJ} = \frac{1}{4}\overline{CD}, \overline{B'L} = \frac{1}{4}\overline{B'C'}, \overline{B'M} = \frac{1}{4}\overline{B'A'}$.



Solució:
La secció és l'hexàgon $IJKLMN$.
$IJLM$ és un rectangle. El centre del cub és la intersecció de les diagonals.
Aleshores, K, N són els punts migs de les arestes $\overline{CC'}, \overline{AA'}$, respectivament.
$\overline{B'L} = \overline{B'M} = \overline{DJ} = 1$
$\overline{LM} = \overline{IJ} = \sqrt{2}, \overline{KM} = 4\sqrt{2}$
$\overline{LK} = \overline{MN} = \sqrt{13}$
Siga P la projecció de L sobre $\overline{KN}$
$\overline{KP} = \frac{1}{2}(\overline{KN} - \overline{LM}) = \frac{3}{2}\sqrt{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KPL}$

$$\overline{PL} = \sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{34}$$

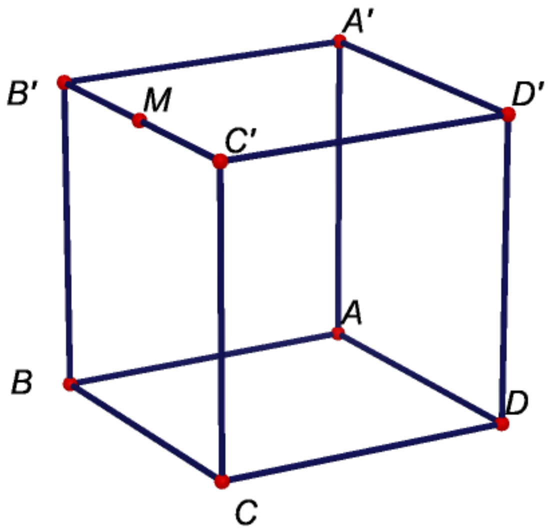
L'àrea de l'hexàgon regular $IJKLMN$ és:
$S_{IJKLMN} = 2 \cdot S_{KLMN} = (\overline{KN} + \overline{LM})\overline{LP} = 5\sqrt{17} \approx 20.6155$



3968.- Siga el cub $ABCDA'B'C'D'$ d'aresta $\overline{AB} = 4$

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{B'C'}$

Calculeu l'àrea de la secció del plànol determinada pels punts A', M, C



Solució:

La secció és el paral·lelogram $A'MCN$, N el punt mig de l'aresta $\overline{AD}$

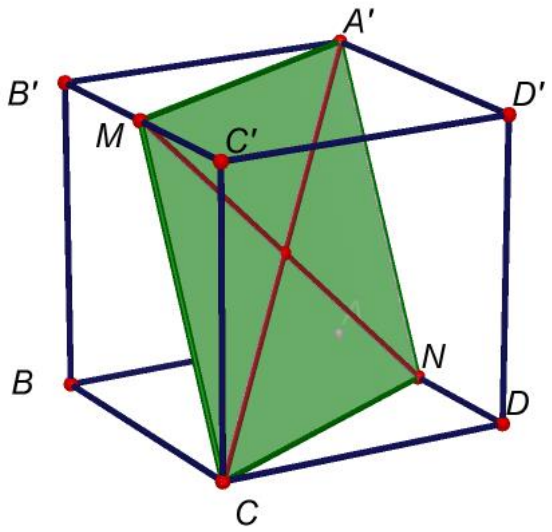
$\overline{A'M} = \overline{CM} = 2\sqrt{5}$

El paral·lelogram $A'MCN$ és un rombe.

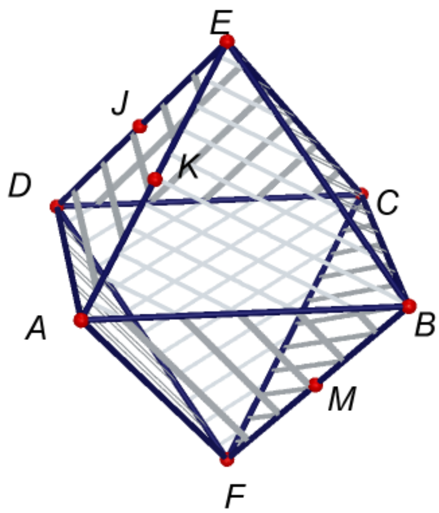
$\overline{A'C} = 4\sqrt{3}, \overline{MN} = 4\sqrt{2}$

L'àrea del rombe és:

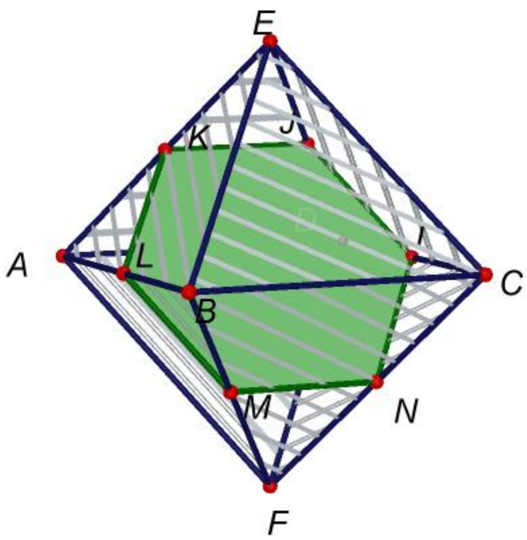
$S_{A'MCN} = \frac{1}{2}\overline{A'C} \cdot \overline{MN} = 8\sqrt{6}$



3969.- Siga l'octàedre regular $ABCDEF$ d'aresta $\overline{AB} = 4$
Calculeu l'àrea de la secció del plànol determinada pels punts J, K, M, punts migs de les arestes $\overline{DE}, \overline{AE}, \overline{FB}$,



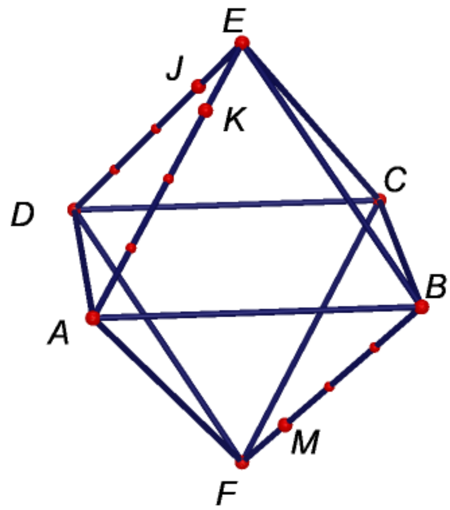
Solució.



La secció és l'hexàgon regular $IJKLMN$ de costat $\overline{JK} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 2$.

$S_{IJKLMN} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} 2^2 = 6\sqrt{3}$

3970.- Siga l'octàedre regular $ABCDEF$ d'aresta $\overline{AB} = 4$
Calculeu l'àrea de la secció del plànol determinada pels punts J, K, M, punts de les arestes $\overline{DE}, \overline{AE}, \overline{FB}$, respectivament tals que $\overline{EJ} = \frac{1}{4}\overline{ED}, \overline{EK} = \frac{1}{4}\overline{EA}, \overline{FM} = \frac{1}{4}\overline{FB}$.



Solució:

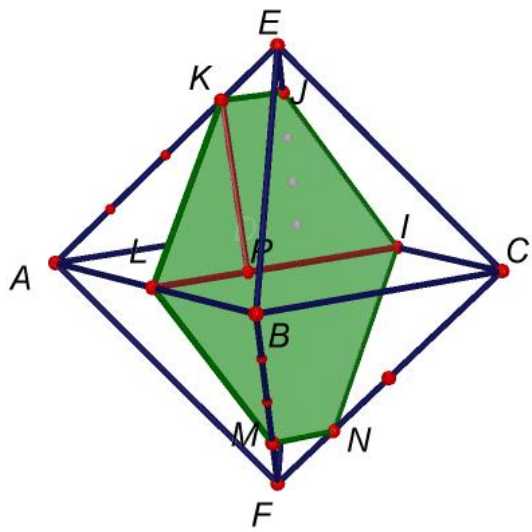
$\overline{JK} = \dfrac{1}{4}\overline{AD} = 1$

La secció és l'hexàgon $IJKLMN$.

L, I són els punts migs de les arestes $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament.

$\overline{LI} = 4$

N pertany a l'aresta $\overline{FC}$ tal que $\overline{FN} = \frac{1}{4}\overline{FC}$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ALK}$

$\overline{KL}^2 = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{2} = 7$

Siga P la projecció de K sobre $\overline{LI}$

$\overline{LP} = \dfrac{1}{2}(4 - 1) = \dfrac{3}{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LPK}$:

$$\overline{KP} = \sqrt{7 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

L'àrea de l'hexàgon regular $IJKLMN$ és:

$$S_{IJKLMN} = 2 \cdot S_{LIJK} = (\overline{LI} + \overline{JK})\overline{KP} = \frac{5}{2}\sqrt{19} \approx 10.8972$$