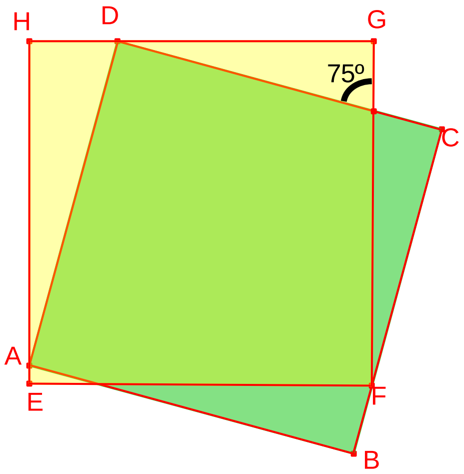
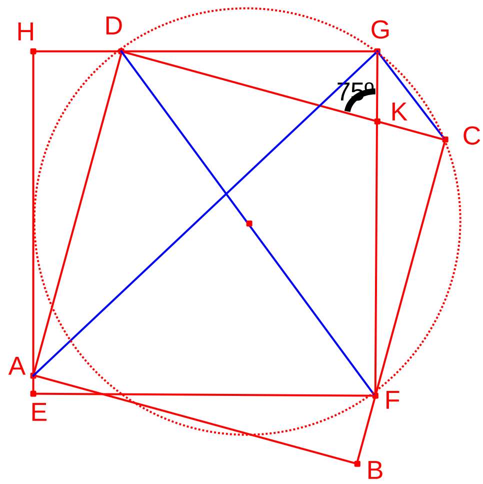


3971.- La figura està formada per dos quadrats. Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrat groc i el quadrat verd.

Solució:
Siga el quadrat verd $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrat verd $EFGH$ de costat $\overline{EF} = c$
Siga $\angle DKG = 75°$
Siga $x = \overline{DH}$
$x = \cos 75°$



El quadrilàter $DGCF$ és inscriptible ja que $\angle DGF = \angle DCF = 90°$
Siga $\alpha = \angle DFG = \angle DCG$

$$\sin\alpha = \frac{c - x}{\sqrt{2c^2 - 2cx + x^2}}, , \cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{2c^2 - 2cx + x^2}}$$

$\angle GDC = 15°$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{CDG}$:

$$\frac{c - x}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin(15° + \alpha)}$$

$$\frac{c - x}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos 15° + \cos\alpha \cdot \sin 15°}$$

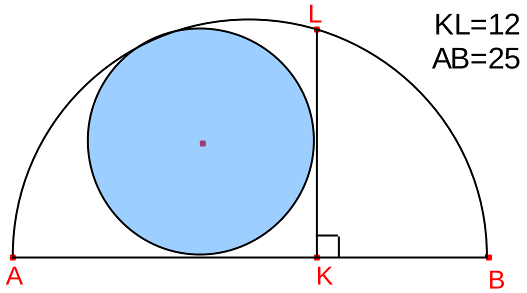
$$1 = \frac{1}{(c - x) \cdot \cos 15° + c \cdot \sin 15°}$$

$$c = \frac{1 + \cos 75° \cdot \cos 15°}{\cos 15° + \cos 75°} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{EFGH}}{S_{ABCD}} = c^2 = \frac{25}{24}$$

3972.- La figura esta formada per un semicercle de diàmetre $\overline{AB} = 25$, un segment perpendicular al diàmetre de longitud $\overline{KL} = 12$ Calculeu l'àrea del cercle tangent al semicercle al diàmetre i al segment.



Solució:

Siga el semicercle ce centre O i radi $\overline{OB} = \overline{OL} = \frac{25}{2}$

Siga el cercle de centre P i radi $\overline{PD} = \overline{PE} = r$

$\overline{OP} = \frac{25}{2} - r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKL}$:

$\overline{OK} = \frac{7}{2}$

$\overline{OD} = r - \frac{7}{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ODP}$:

$\left(\frac{25}{2} - r\right)^2 = r^2 + \left(r - \frac{7}{2}\right)^2$

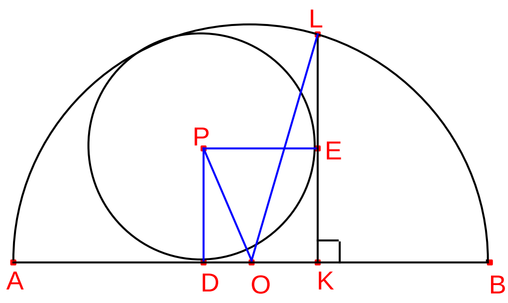
Simplificant:

$r^2 + 18r - 144 = 0$

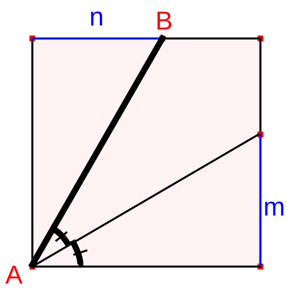
$r = 6$

L'àrea del cercle ombrejat és:

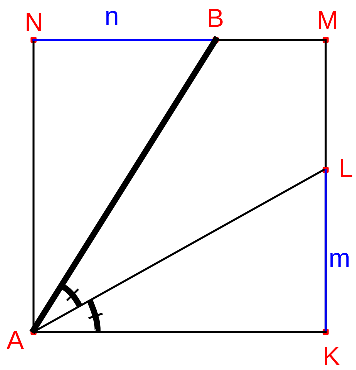
$S_P = 36\pi$



3973.- La figura està formada per un quadrat.
Determineu la mesura del segment $\overline{AB}$ en funció de m, n



Solució:
Siga el quadrat $AKMN$ de costat $\overline{AK} = c$
Siga $\alpha = \angle KAL = \angle LAB$

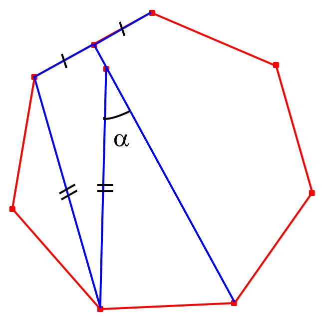


$$\tan\alpha = \frac{m}{c}$$
$$\tan(90° - 2\alpha) = \frac{n}{c}$$
$$\frac{n}{c} = \frac{1}{\tan 2\alpha} = \frac{1}{\frac{2\frac{m}{c}}{1-\left(\frac{m}{c}\right)^2}} = \frac{c^2 - m^2}{2mc}$$

Simplificant:
$c^2 = 2mn + m^2$

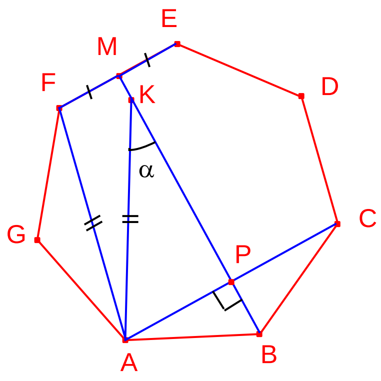
aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANB}$:
$\overline{AB}^2 = n^2 + c^2 = (m+n)^2$
$\overline{AB} = m + n$

3974.- La figura està formada per un heptàgon regular.
Calculeu la mesura de l'angle α

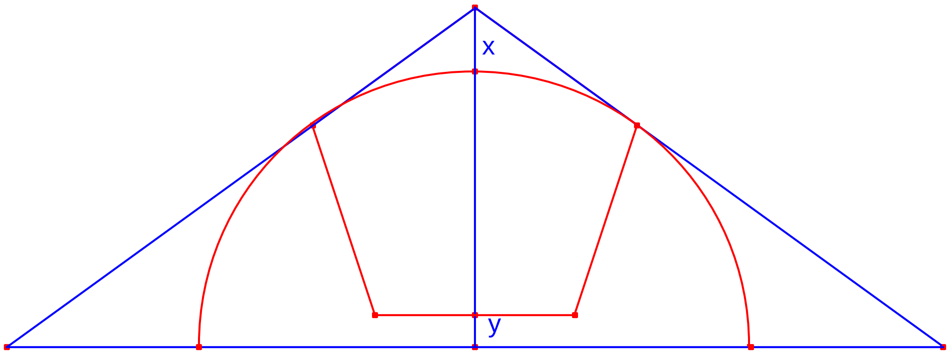


Solució:
Siga l'heptàgon regular $ABCDEFG$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{FE}$
$\overline{BM}$ i $\overline{FE}$ són perpendiculars.
$\overline{BM}$ és la mediatriu del segment $\overline{AC}$.

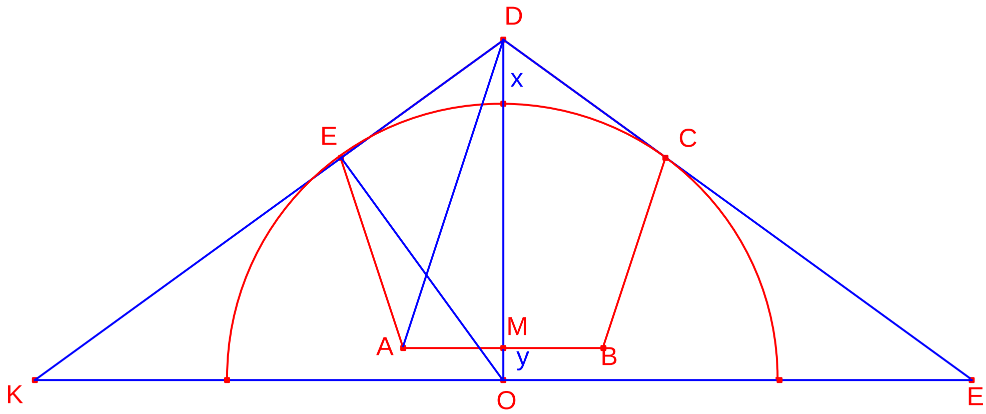
Siga $\overline{AF} = \overline{AK}$
$\overline{AF} = \overline{AC}$
$\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AK}$
$\alpha = \angle AKP = 30°$



3975.- La figura està formada per un pentàgon regular, un semicercle i un triangle. Calculeu la proporció $x : y$



Solució:



Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 1$

$\overline{AD} = \Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\overline{OD} = \dfrac{1}{\sin 36°}$

$\overline{OE} = \dfrac{1}{\tan 36°}$

$\overline{DM} = \Phi \cdot \cos 18°$

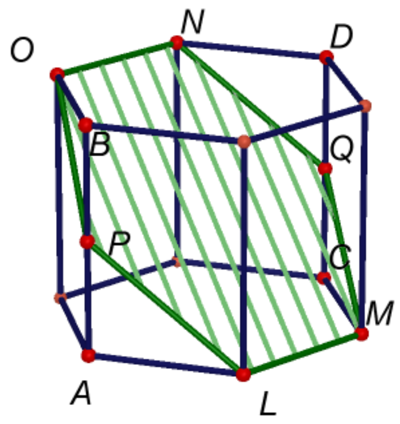
$\cos 36° = \dfrac{\Phi}{2}$

$$y = \overline{OD} - \overline{DM} = \frac{1}{\sin 36°} - \Phi \cdot \cos 18° = \frac{1 - \Phi \cdot \cos 18° \cdot \sin 36°}{\sin 36°} = \frac{1 - \cos 18° \cdot \sin 72°}{\sin 36°}$$

$$x = \overline{OD} - \overline{OE} = \frac{1}{\sin 36°} - \frac{\cos 36°}{\sin 36°} = \frac{1 - \cos 36°}{\sin 36°} = \frac{2 \cdot \sin^2 18°}{\sin 36°}$$

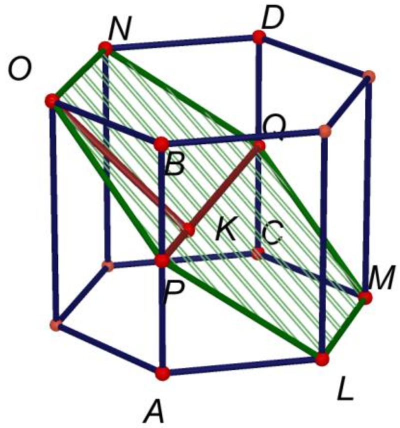
$$\frac{x}{y} = \frac{2 \cdot \sin^2 18°}{1 - \cos 18° \cdot \sin 72°} = \frac{2 \cdot \sin^2 18°}{1 - \cos^2 18°} = 2$$

3976.- La figura està formada per un prisma regular hexagonal d'aresta de la base $\overline{AL} = 4$ i aresta lateral $\overline{AB} = 6$, $\overline{AP} = \overline{BP}, \overline{CQ} = \overline{DQ}$
Calculeu l'àrea de l'hexàgon $LMQNOP$.

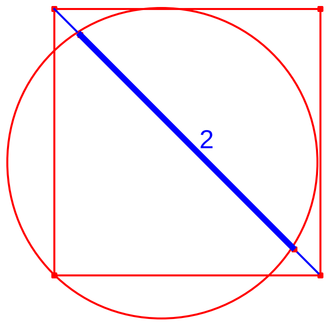


Solució:
$\overline{PQ} = 2 \cdot 4 = 8$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBP}$:
$\overline{OP} = 5$

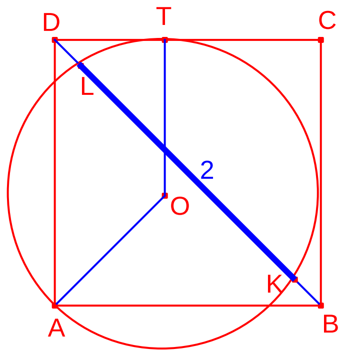
Siga K la projecció de O sobre $\overline{PQ}$
$\overline{PK} = \frac{1}{2}(8-4) = 2$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKO}$:
$\overline{OK} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$
L'àrea de l'hexàgon $LMQNOP$ és:
$S_{LMQNOP} = 2 \cdot S_{PQNO} = (\overline{PQ} + \overline{ON}) \cdot \overline{OK} = 12\sqrt{21}$



3977.- La figura està formada per un quadrat i una circumferència tangent a dos costats del quadrat i passa per un vèrtex.
Calculeu el radi de la circumferència.



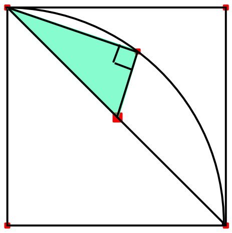
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OK} = \overline{OA} = \overline{OT} = r$



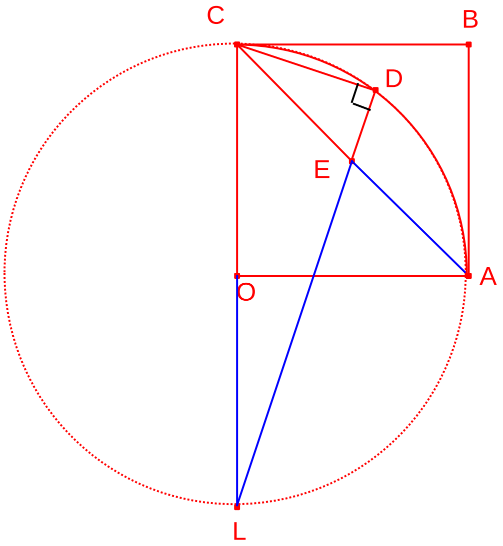
$\overline{DT} = \frac{\sqrt{2}}{2}r, \overline{CT} = r$
Siga $\overline{DL} = a, \overline{KL} = 2$
Aplicant la potència de D sobre la circumferència:
$a(2+a) = \frac{1}{2}r^2$
$a^2 + 2a - \frac{1}{2}r^2 = 0$
Resolent l'equació:
$a = \frac{-2+\sqrt{4+2r^2}}{2}$
$2a + 2 = \sqrt{4+2r^2}$

$\overline{BD} = 2a + 2 = \left(1+\sqrt{2}\right)r$
$\sqrt{4+2r^2} = \left(1+\sqrt{2}\right)r$
Elevant al quadrat:
$r^2 = \frac{4\left(2\sqrt{2}-1\right)}{7}$
$r = 2\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{7}} \approx 1.0222$

3978.- Un quadrant i un triangle estan dins d'un quadrat. Un dels vèrtexs del triangle és el centre del quadrat. Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle i l'àrea del quadrat.



Solució:



OA=1

DE=a, CD=b

CE=sqrt(2)/2

a²+b²=1/2

DL²=4-b²=7/2+a²

EL=sqrt(7/2+a²)-a

Potència de E respecte de la circumferència

a·(sqrt(7/2+a²)-a)=1/2

a²=1/10

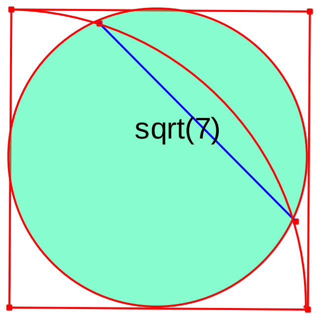
a=1/sqrt(10), b=sqrt(2)/sqrt(5)

[CDE]/[OABC]=ab/2=1/10

3979.- La figura està formada per un quadrat, la seua circumferència inscrita i un quadrant amb centre en un vèrtex.

La corda comuna al quadrant i la circumferència mesura $\sqrt{7}$

Calculeu l'àrea del cercle.



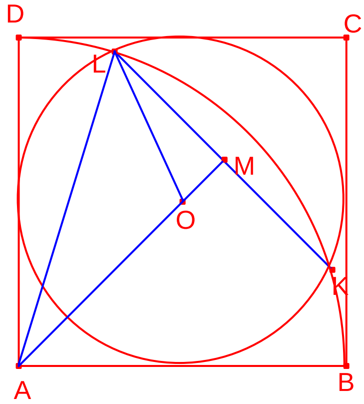
Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de centre O i costat $\overline{AB} = 2r$

$\overline{OA} = r\sqrt{2}$

Siga la circumferència inscrita al quadrat de centre O i radi $\overline{OK} = \overline{OL} = r$

Siga M el punt mig del segment $\overline{KL}$



$\overline{LM} = \frac{1}{2}\sqrt{7}$

$\overline{AL} = 2r$

Siga $\overline{OM} = a$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{OML}, \overset{\Delta}{AML}$:

$a^2 = r^2 - \frac{7}{4}$

$4r^2 = \frac{7}{4} + \left(r\sqrt{2} + a\right)^2$

$2r^2 = \frac{7}{4} + a^2 + 2\sqrt{2}ar$

$r^2 = 2\sqrt{2}\sqrt{r^2 - \frac{7}{4}} \cdot r$

Elevant al quadrat:

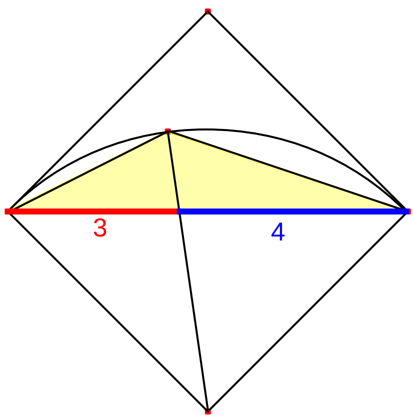
$7r^4 = 14r^2$

$r^2 = 2$

L'àrea del cercle és:

$S_O = 2\pi$

3980.- La figura està formada per un quadrat i un quadrant.
Una diagonal del quadrat està formada per dos segments de longituds 3 i 4.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de diagonal $\overline{BD} = 7$
$\overline{AB} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$
Siga $\overline{EK} = a$
Aplicant la potència de K respecte de la circumferència:
$3 \cdot 4 = a\left(7\sqrt{2} - a\right)$
$a^2 - 7\sqrt{2}a + 12 = 0$
Resolent l'equació:
$a = \sqrt{2}$
$\overline{AK} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$
Siga $\alpha = \angle DAK$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ADK}$:
$9 = \frac{49}{2} + \frac{25}{2} - 2\frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\alpha$
Simplificant:
$\cos\alpha = \frac{4}{5}, \cos(90° - \alpha) = \frac{3}{5}$
$\angle DEB = 135°$
Siguen $\overline{DE} = b, \overline{BE} = c$
Aplicant el teorema del cosinus als triangles $\overset{\Delta}{ADE}, \overset{\Delta}{ABE}$:
$b^2 = \frac{49}{2} + \frac{49}{2} - 2 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5}$
$c^2 = \frac{49}{2} + \frac{49}{2} - 2 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5}$
Aleshores:
$b = 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}, c = 7\sqrt{\frac{2}{5}}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DBE}$ és:
$S_{DBE} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin 135° = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 7\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{49}{10}$