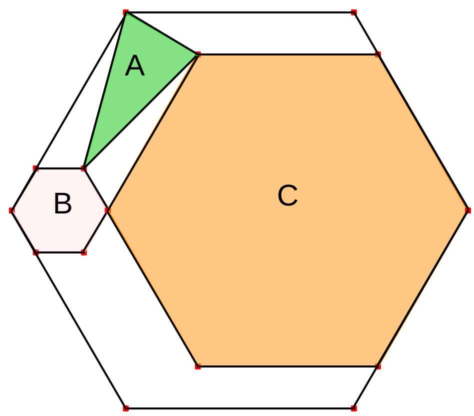
3981.- La figura està formada per tres hexàgons regulars.
L'exterior té costat 1 i la diferència d'àrees $C - B = \frac{3}{2}$
Calculeu l'àrea A del triangle ombrejat



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga l'hexàgon regular $FGHIJK$ de costat $\overline{FG} = b$ i àrea B.
Siga l'hexàgon regular $ILMCNP$ de costat $\overline{IL} = c$ i àrea C
$b + c = 1$

$$C - B = \frac{3}{2} = (c^2 - b^2)6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

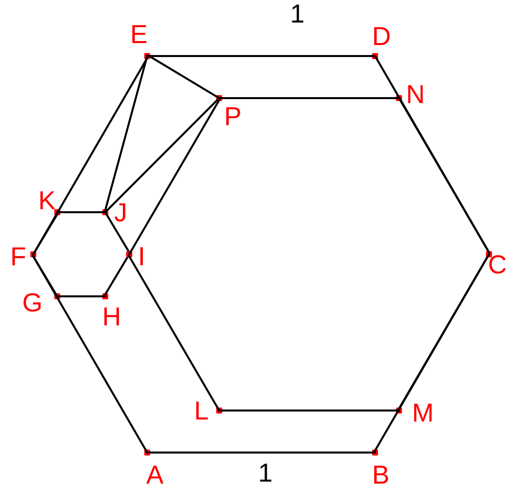
$$(b + c)(c - b) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$c - b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resolent el sistema:

$$b = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}, c = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$$

Siga $a = \overline{JP} = \overline{JE}$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{KJE}$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc = \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{6}\right)^2 - \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Siga $\beta = \angle KJE$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{KJE}$:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2} + \frac{2 + \sqrt{3}}{6} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \cdot \cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

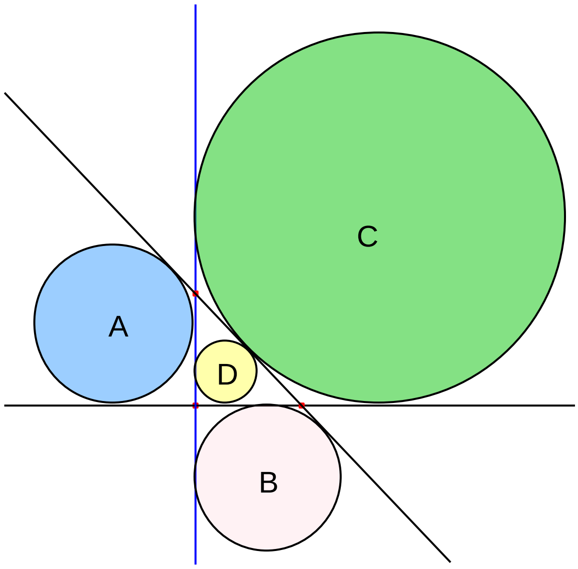
$\beta = 105°$

$\angle EJP = 360° - (120° - 2\beta) = 30°$

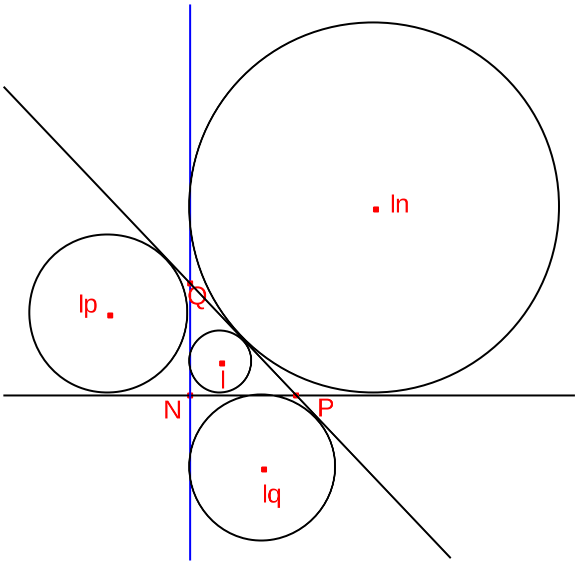
L'àrea del triangle ombrejat $\overset{\Delta}{JEP}$:

$$A = S_{JEP} = \frac{1}{2}a^2 \cdot \sin 30° = \frac{1}{8}$$

3982.- La figura està formada per tres rectes dues d'elles perpendiculars i quatre circumferències d'àrees A, B, C, D, tangents a les rectes.
Proveu que $A \cdot B = C \cdot D$



Solució:
Siguen N, P, Q les interseccions de les tres rectes.



Siga la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{NPQ}$ de radi r, $n^2 = p^2 + q^2$
Siga la circumferència exinscrita de centre I_n i radi r_n
Siga la circumferència exinscrita de centre I_p i radi r_p
Siga la circumferència exinscrita de centre I_q i radi r_q
Siga $s = \frac{n+p+q}{2}$ semiperímetre del triangle rectangle.

$$\frac{r_n}{r} = \frac{s}{s-n}, \frac{r_p}{r} = \frac{s}{s-p}, \frac{r_n}{r} = \frac{s}{s-p}$$

$$A \cdot D = \pi \cdot r_n{}^2 \cdot r^2 = \pi \left(\frac{s}{s-n}\right)^2 r^4$$

$$A \cdot B = \pi \cdot r_p{}^2 \cdot r_q{}^2 = \left(\frac{s}{s-p}\right)^2 \left(\frac{s}{s-q}\right)^2 r^4$$

$$A \cdot B = C \cdot D \iff \left(\frac{s}{s-n}\right)^2 = \left(\frac{s}{s-p}\right)^2 \left(\frac{s}{s-q}\right)^2 \iff$$

$$\iff \frac{1}{(s-n)^2} = \frac{s^2}{(s-p)^2 \cdot (s-q)^2} \iff$$

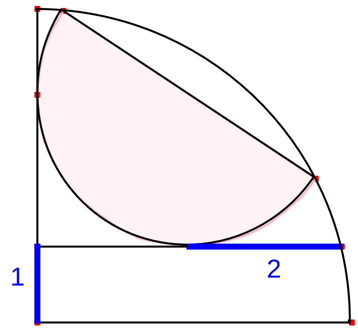
$$\iff s^2 \cdot (s-n)^2 = (s-p)^2 \cdot (s-q)^2 \iff$$

$$\iff (n+p+q)(-n+p+q) = (n-p+q)(n+p-q) \iff$$

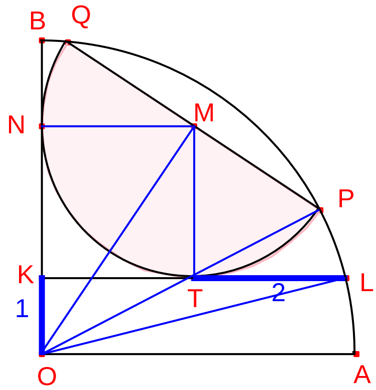
$$\iff (p+q)^2 - n^2 = n^2 - (p-q)^2 \iff$$

$$\iff 2pq = 2pq$$

3983.- La figura està formada per un quadrant i un semicercle.
Calculeu l'àrea del semicercle ombrejat.



Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OP} = R$
Siga el semicercle de centre M i diàmetre $\overline{PQ} = 2r$
$\overline{MT} = \overline{MN} = \overline{KT} = r$

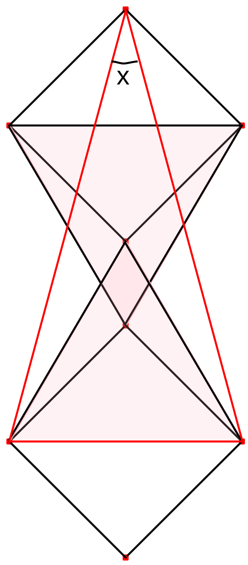


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKL}$:
$R^2 = 1 + (2 + r)^2$

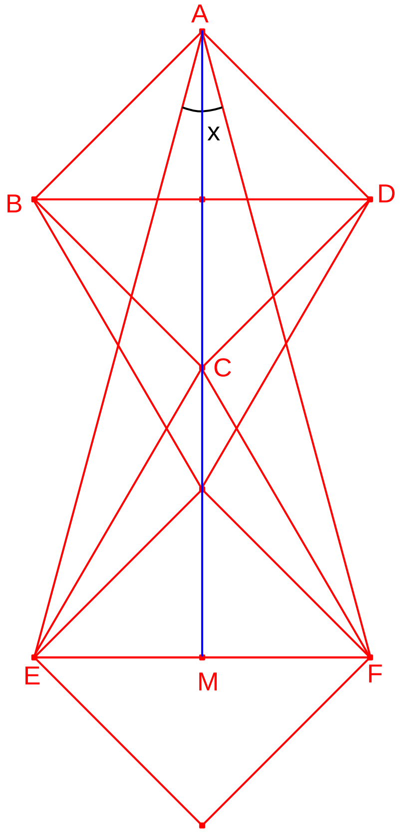
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMP}$:
$\overline{OM}^2 = R^2 - r^2 = 5 + 4r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ONM}$:
$5 + 4r = r^2 + (1 + r)^2$
Simplificant:
$r^2 - r + 2 = 0$
Resolent l'equació:
$r = 2$
L'àrea del semicercle és:
$S_M = \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = 2\pi$

3984.- La figura està formada per dos quadrats iguals i dos triangles equilàters iguals.
Calculeu la mesura de l’angle x



Solució:



AB=1

BD=EF=sqrt(2)

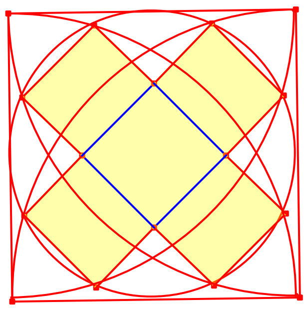
CM=(sqrt(3)/2)·sqrt(2)=sqrt(6)/2
AM=sqrt(2)+sqrt(6)/2
EM=sqrt(2)/2

tan(x/2)=EM/AM)=2-sqrt(3)

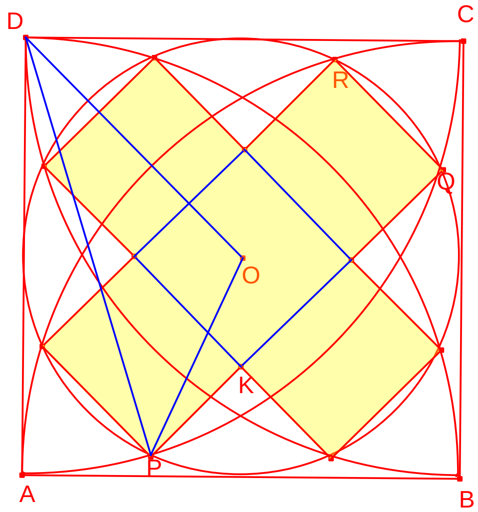
x/2=15º

x=30º

3985.- En un quadrat s'han dibuixat quatre quadrants i la circumferència inscrita al quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



Solució:



AB=2
anglePDO=x
OD=sqrt(2), DP=2, OP=1

cos x=(5/8)sqrt(2)

cos(2x)=9/16

PQ²=4+4-2·2·2·(9/16)=7/2

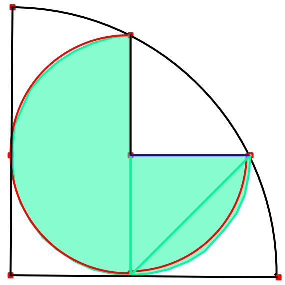
QR²=4-PQ²=sqrt(2)/2
PK=(PQ-QR)/2=(sqrt(14)-sqrt(2))/4

[Groga]=PQ·QR+2·QR·PK=(2·sqrt(7)-1)/2

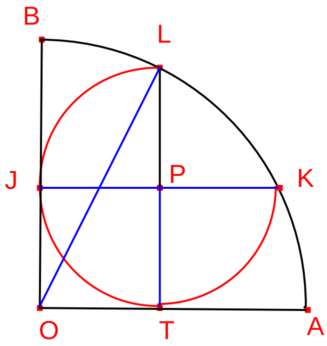
[Groga]/[ABCD]=(2·sqrt(7)-1)/8

0.5364

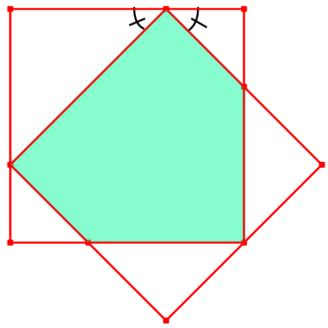
3986.- La figura està formada per un quadrant i en el seu interior tres quadrants ombrejats.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrant exterior.



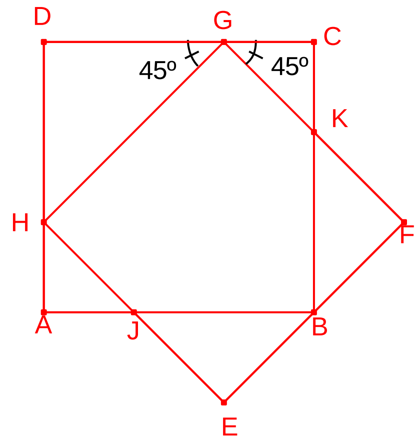
Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OL} = R$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PL} = \overline{PJ} = r$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTL}$:
$R^2 = r^2 + 4r^2$
$\frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{5}$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_P}{S_O} = \frac{\frac{3}{4}\pi r^2}{\frac{1}{4}\pi R^2} = \frac{3}{5}$



3987.- La figura està formada per dos quadrats. Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total de la figura.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrat $EFGH$.
$\angle DGH = \angle KGC = 45°$
Siga $\overline{CG} = \overline{CK} = a, \overline{DG} = \overline{DH} = \overline{BK} = 1 - a$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GDH}$:
$\overline{GH} = (1-a)\sqrt{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GCK}$:
$\overline{GK} = a\sqrt{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BFK}$:
$\overline{FK} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-a)$
$\overline{GF} = a\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-a)$
$a\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-a) = (1-a)\sqrt{2}$
Resolent l'equació:
$a = \frac{1}{3}$
L'àrea ombrejada és:

$$S_{JBKGH} = S_{EFGH} - 2 \cdot S_{BFK} = \left((1-a)\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-a)\right)^2 = \frac{2}{3}$$

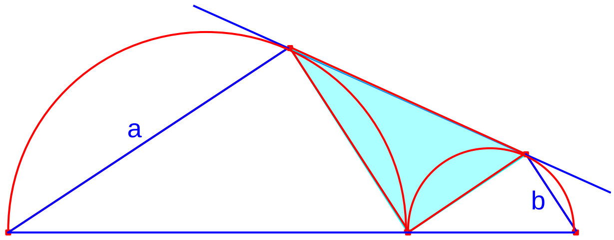
L'àrea total és:

$$S_{AJEFKCD} = S_{ABCD} + 2 \cdot S_{BFK} = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-a)\right)^2 = \frac{11}{9}$$

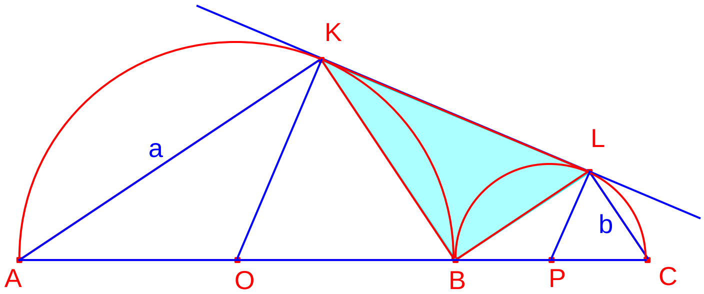
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{JBKGH}}{S_{AJEFKCD}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{11}{9}} = \frac{6}{11}$$

3988.- La figura està formada per dues semicircumferències tangents i la tangent comuna.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat en funció de a, b



Solució:



Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$
Siga la semicircumferència de centre P i diàmetre $\overline{BC} = 2r$
Siga la tangent KL a les dues semicircumferències.
$\overline{OK}$ i $\overline{PL}$ són perpendicular a KL. Aleshores són paral·lels.

Aleshores, Els triangles $\overset{\Delta}{ABK}, \overset{\Delta}{BCL}$ són semblants.
$\angle KBL = 90°$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABK}, \overset{\Delta}{BCL}$:
$\overline{BK} = \sqrt{4R^2 - a^2}, \overline{BL} = \sqrt{4r^2 - b^2}$

Aplicant el teorema de Tales als triangles semblants $\overset{\Delta}{ABK}, \overset{\Delta}{BCL}$:

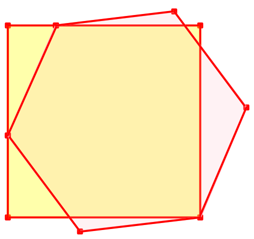
$$\frac{a}{\sqrt{4r^2 - b^2}} = \frac{R}{r}$$

$$R^2 = \frac{a^2 r^2}{4r^2 - b^2}$$

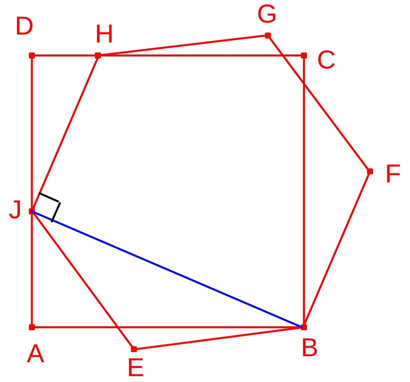
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{KBL}$ és:

$$S_{KBL} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2} \cdot \sqrt{4r^2 - b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4\frac{a^2 r^2}{4r^2 - b^2} - a^2} \cdot \sqrt{4r^2 - b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 b^2} = \frac{ab}{2}$$

3989.- La figura està formada per un quadrat i un hexàgon regular.
Quina de les dues àrees és més gran?



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga l'hexàgon regular $EBFGHJ$ de costat $\overline{EB} = c$

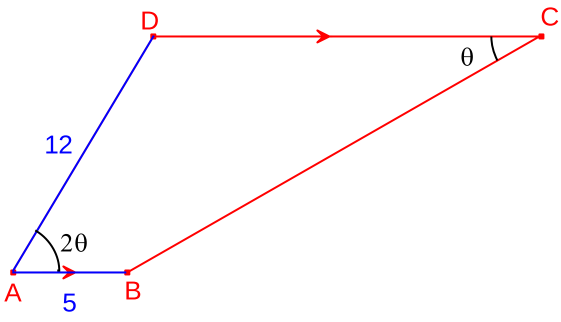


Siga $\overline{AJ} = x$
$\overline{BJ} = c\sqrt{3}$

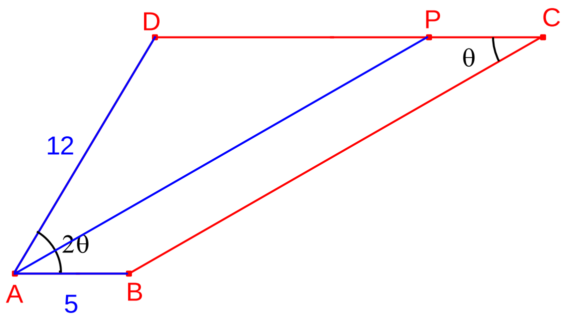
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABJ}$:
$3c^2 = 1 + x^2$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABJ}, \overset{\Delta}{DJH}$:
$$\frac{1-x}{c} = \frac{1}{c\sqrt{3}}$$
$$x = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$
$$c^2 = \frac{1+x^2}{3} = \frac{7-2\sqrt{3}}{9}$$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = 1$
L'àrea de l'hexàgon regular $EBFGHJ$ és:
$$S_{EBFGHJ} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} c^2 = \frac{7\sqrt{3}-6}{6}$$
$$\frac{7\sqrt{3}-6}{6} > 1 \iff 7\sqrt{3} > 12 \iff 147 > 144$$
Aleshores, l'àrea de l'hexàgon regular és major que l'àrea del quadrat.

3990.- En la figura, $ABCD$ és un trapezi de costats paral·lels $\overline{AB}=5, \overline{CD}$
$\angle BCD=\theta, \angle BAD=2\theta$
Si $\overline{AD}=12$, calculeu la mesura del costat $\overline{CD}$



Solució:



Siga $\overline{AP}$ bisectriu de l'angle $\angle BAD=2\theta$
$ABCP$ és un paral·lelogram.
$\overline{PC}=\overline{AB}=5$
$\angle APD=\theta$
$\overline{PD}=\overline{AD}=12$
Aleshores:
$\overline{CD}=12+5=17$