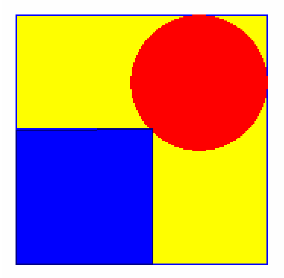
21.- En la següent figura el quadrat gran té costat a i el costat del quadrat menut i el diàmetre del cercle són iguals. Calculeu el radi del cercle.
Sangaku pàgina 67.

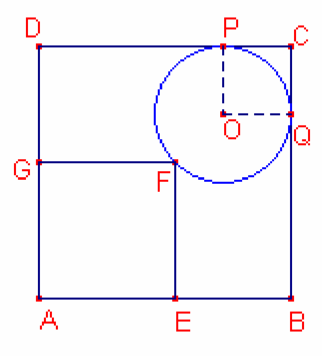


Solució:

Siga $a = \overline{AB}$ el costat del quadrat ABCD.
Siga $x = \overline{OF} = \overline{OP} = \overline{OQ}$ el radi del cercle.
Siga AEFG el quadrat menut.
Per hipòtesi $\overline{AE} = 2x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEF}$:

$\overline{AF} = 2x\sqrt{2}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC} = a\sqrt{2}$.

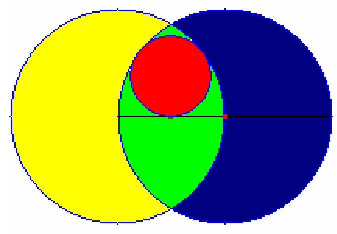
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQC}$:

$\overline{OC} = x\sqrt{2}$.
Notem que $\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{FO} + \overline{OC}$:

$a\sqrt{2} = 2x\sqrt{2} + x + x\sqrt{2}$.
$a\sqrt{2} = \left(1 + 3\sqrt{2}\right)x$. Resolent l'equació en la incògnita x:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{1+3\sqrt{2}}a = \frac{6-\sqrt{2}}{17}a.$$

22.- Les circumferències grans tenen diàmetre d, i cadascuna de elles passa pel centre de l'altra. La circumferència menuda és tangent interior a les dues grans i al diàmetre. Calculeu el radi de la circumferència menuda.



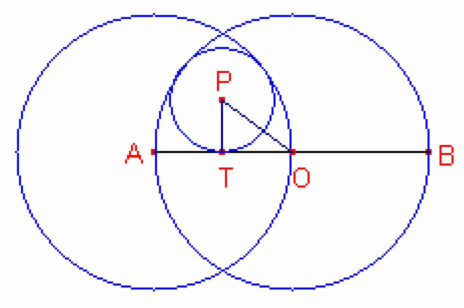
Solució:

Siga $d = \overline{AB}$ el diàmetre de la circumferència gran, siga O el centre.

Siga A el centre de l'altra circumferència que passa per O.

Siga P el centre de la circumferència menuda i T el punt de tangència amb el diàmetre $\overline{AB}$.

Siga r el radi de la circumferència menuda $r = \overline{PT}$.



$\overline{OT} = \dfrac{d}{4}$.

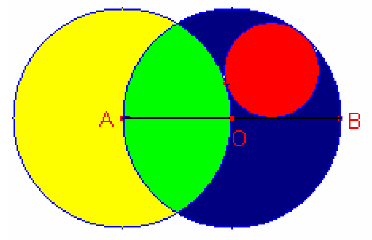
$\overline{OP} = \overline{OA} - r = \dfrac{d}{2} - r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTP}$:

$\left(\dfrac{d}{2} - r\right)^2 = r^2 + \left(\dfrac{d}{4}\right)^2$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r = \dfrac{3}{16}d$.

23.- Les circumferències grans tenen diàmetre d, i cadascuna de elles passa pel centre de l'altra. La circumferència menuda és tangent interior a una de les grans i exterior a l'altra i al diàmetre. Calculeu el radi de la circumferència menuda.
Shariguin I126

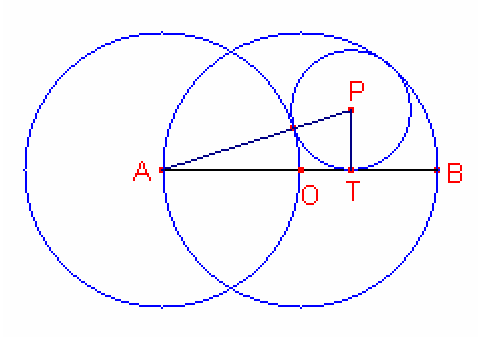


Solució:

Siga $d=\overline{AB}$ el diàmetre de la circumferència gran, siga O el centre.

Siga A el centre de l'altra circumferència que passa per O.

Siga P el centre de la circumferència menuda i T el punt de tangència amb el diàmetre $\overline{AB}$.



Siga r el radi de la circumferència menuda $r=\overline{PT}$.

Siga $\overline{OT}=x$. $\overline{AT}=\frac{d}{2}+x$.

$\overline{AP}=\frac{d}{2}+r$.

$\overline{OP}=\frac{d}{2}-r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATP}$:

$\left(\frac{d}{2}+r\right)^2=r^2+\left(\frac{d}{2}+x\right)^2$. Simplificant:

$dr-x^2-dx=0$ (1)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTP}$:

$\left(\frac{d}{2}-r\right)^2=x^2+r^2$. Simplificant:

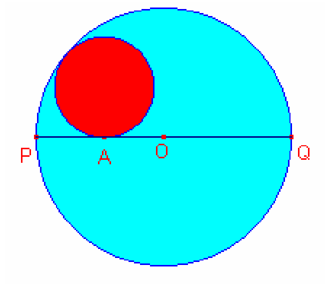
$d^2-4x^2-4dr=0$ (2)

Considerem els sistema format per les expressions (1), (2)

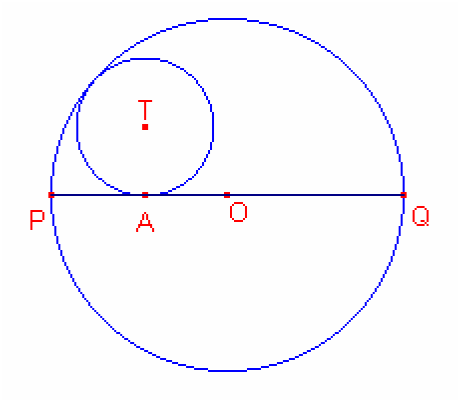
$\begin{cases} dr-x^2-dx=0 \\ d^2-4x^2-4dr=0 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}-1}{4}d \\ r=\frac{\sqrt{3}}{8}d \end{cases}.$$

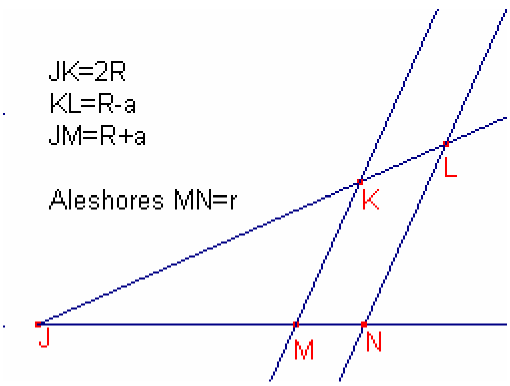
24.- En una circumferència de radi R s'ha dibuixat un diàmetre i sobre aquest s'agafa el punt A a un distància a del centre. Determineu el radi de la segona circumferència tangent interior a la primera circumferència i tangent al diàmetre en el punt A. Es pot construir la segona circumferència amb regle i compàs?.
Shariguin I75.



Solució:
Siga $\overline{PQ} = 2R$ diàmetre de la circumferència.
Siga $a = \overline{OA}$.
Siga T el centre de la segona circumferència.
Siga $\overline{TA} = r$, radi de la segona circumferència.
$\overline{OT} = R - r$.

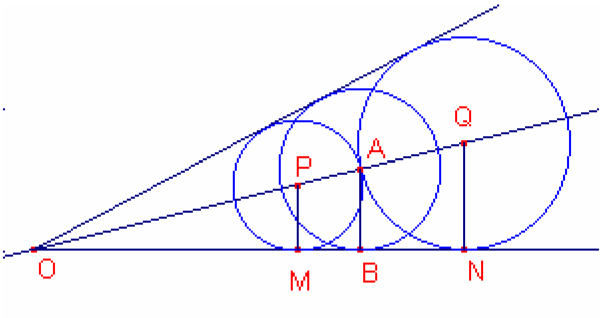


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAT}$:
$(R - r)^2 = r^2 + a^2$.
Resolent l'equació en la incògnita r:
$$r = \frac{R^2 - a^2}{2R}$$
Vegem que el problema és pot construir amb regle i compàs.
$$r = \frac{(R + a)(R - a)}{2R}.$$
$$\frac{2R}{R + a} = \frac{R - a}{r}.$$
Aleshores r és quarta proporcional de $2R, R + a, R - a$.



25.- Dues circumferències de radis R i r són tangents exteriors i tangents als costats d'un angle. Calculeu el radi d'una tercera circumferència tangent als costats de l'angle i que té centre en el punt de tangència de les dues circumferències.
Shariguin I140.

Solució:



Siga O el vèrtex de l'angle.
Els centres de les tres circumferències pertanyen a la bisectriu de l'angle.
Siga la circumferència de centre P i radi $r=\overline{PM}$.
Siga la circumferència de centre Q i radi $R=\overline{QN}$.
Siga A el punt de tangència de les dues circumferències.
Siga $\overline{AB}=s$ el radi de la tercera circumferència que cerquem.
Siga $a=\overline{OP}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{OMP}, \overset{\Delta}{OBA}, \overset{\Delta}{ONQ}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{r}{a}=\frac{s}{a+r}=\frac{R}{a+r+R}.$$

$$\frac{r}{a}=\frac{R}{a+r+R}\text{, aleshores, } a=\frac{(R+r)r}{R-r} \qquad (1)$$

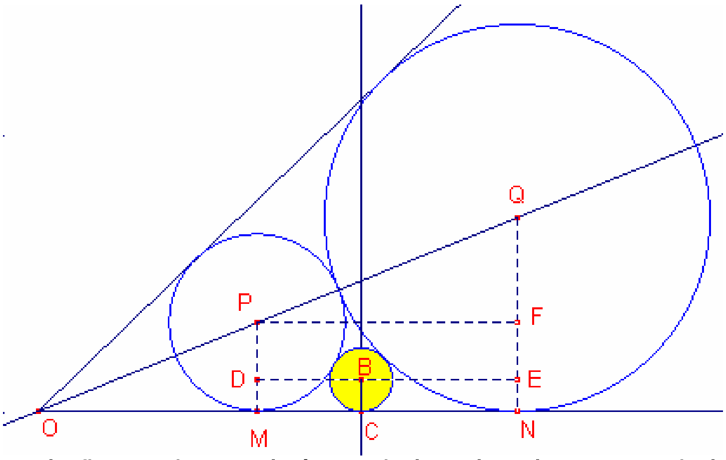
$$\frac{r}{a}=\frac{s}{a+r}, \quad s=\frac{(a+r)r}{a} \qquad (2)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2):

$$s=\frac{\left(\frac{(R+r)r}{R-r}+r\right)r}{\frac{(R+r)r}{r-R}}=\frac{2Rr}{R+r}.$$

26.- Dues circumferències de radis R i r són tangents exteriors i tangents als costats d'un angle. Calculeu el radi d'una tercera circumferència tangent exterior a les dues circumferències i tangent a un costat de l'angle.

Solució:



En la figura siga O el vèrtex de l'angle. Els centres de les tres circumferències pertanyen a la bisectriu de l'angle.

Siga la circumferència de centre P i radi $r=\overline{PM}$. Siga la circumferència de centre Q i radi $R=\overline{QN}$. Siga B el centre de la tercera circumferència tangent exterior a les dues anteriors i tangent a costat ON de l'angle. Siga $s=\overline{BC}$ el seu radi.

$\overline{PQ}=R+r$.

$\overline{QF}=R-r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PFQ}$:

$\overline{PF}=\overline{MN}=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\sqrt{Rr}$.

$\overline{PB}=r+s$.

$\overline{PD}=r-s$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PDB}$:

$\overline{DB}=\overline{MC}=\sqrt{(r+s)^2-(r-s)^2}=2\sqrt{rs}$.

$\overline{QB}=R+s$.

$\overline{QE}=R-s$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QEB}$:

$\overline{EB}=\overline{CN}=\sqrt{(R+s)^2-(R-s)^2}=2\sqrt{Rs}$.

$\overline{MN}=\overline{MC}+\overline{CN}$, aleshores:

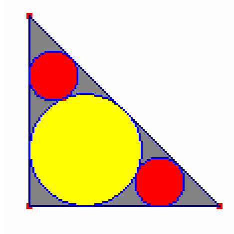
$2\sqrt{Rr}=2\sqrt{rs}+2\sqrt{Rs}$. Elevant al quadrat:

$Rr=rs+Rs+2\sqrt{Rrs}$.

$\left(r+R+2\sqrt{Rr}\right)=Rr$. Aïllant la incògnita s:

$$s=\frac{Rs}{\left(\sqrt{R}+\sqrt{r}\right)^2}.$$

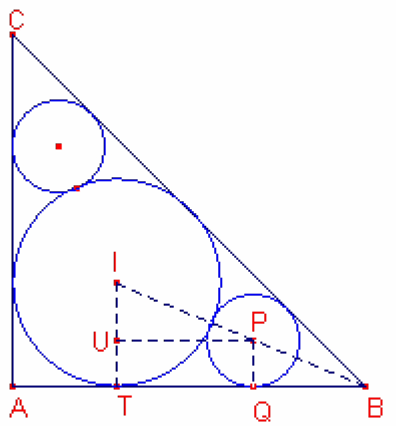
27.- En un triangle rectangle i isòsceles s'ha dibuixat la circumferència inscrita i dues circumferències iguals tangents exteriors a la circumferència inscrita i tangent a la hipotenusa i un catet. Calculeu la proporció entre els radis de les circumferències distintes.



Solució:

Siga el triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o, B = 45^o$.

Siga la circumferència inscrita al triangle de centre I i radi $r = \overline{IT}$.
Siga la circumferència tangent a l'anterior de centre P i radi $s = \overline{PQ}$.



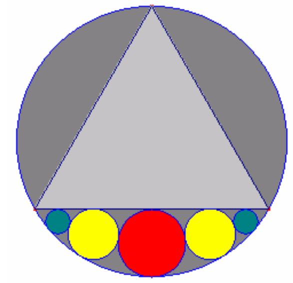
Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{IUP}$.

$\overline{IP} = r + s$, $\overline{IU} = r - s$, $\angle IPU = \frac{45^o}{2}$.

$$\frac{r-s}{r+s} = \sin\frac{45^o}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 45^o}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\frac{1-\frac{s}{r}}{1+\frac{s}{r}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$ Resolent l'equació en la incògnita $\frac{s}{r}$:

$$\frac{s}{r} = \frac{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}.$$

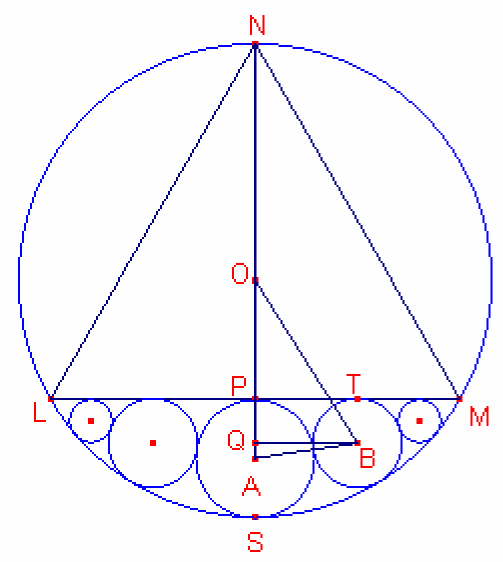


28.- Una circumferència de radi R té inscrit un triangle equilàter. En l'interior de la circumferència hi ha inscrites cinc circumferències tangents dos a dos i tangents al costat del triangle (veure figura).Calculeu els radis de les cinc circumferències.

Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{LMN}$.

Siga la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{LMN}$ de centre O i radi $R = \overline{OM}$.
Siga P el punt mig del costat $\overline{LM}$.



$\overline{ON} = R$, $\overline{OP} = \frac{R}{2}$.

$\overline{PS} = 2R - \overline{NP} = 2R - \frac{3}{2}R = \frac{R}{2}$.

Siga la circumferència de centre A i radi $r = \overline{AP}$.

$r = \overline{AP} = \frac{\overline{PS}}{2} = \frac{R}{4}$.

Siga la circumferència de centre B i radi $s = \overline{BT}$.

$\overline{OB} = R - s$, $\overline{AB} = \frac{1}{4}R + s$, $\overline{PQ} = \overline{BT} = s$, $\overline{AQ} = \frac{1}{4}R - s$,

$\overline{OQ} = \frac{1}{2}R + s$, $\overline{OA} = \frac{3}{4}R$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AQB}$:

$$\overline{BQ} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}R + s\right)^2 - \left(\frac{1}{4}R - s\right)^2} = \sqrt{Rs} .$$

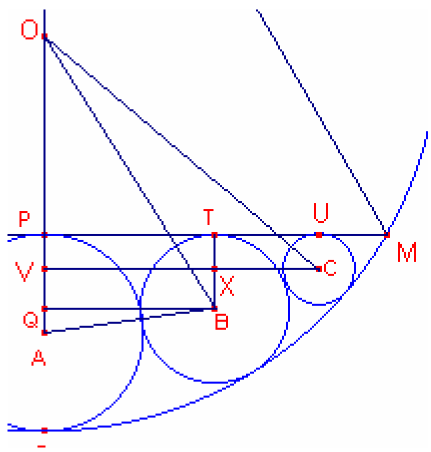
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQB}$:

$$\overline{OQ} = \sqrt{(R - s)^2 - \left(\sqrt{Rs}\right)^2} = \sqrt{R^2 + s^2 - 3Rs} .$$

$\overline{OA} = \overline{AQ} + \overline{OQ}$, aleshores:

$\frac{3}{4}R = \frac{1}{4}R - s + \sqrt{R^2 + s^2 - 3Rs}$. Resolent l'equació en la incògnita s:

$$s = \frac{3}{16}R .$$



Siga la circumferència de centre C i radi $t = \overline{CU}$.

$\overline{OC} = R - t$, $\overline{BC} = s + t = \frac{3}{16}R + t$, $\overline{BX} = s - t = \frac{3}{16}R - t$.

$\overline{OV} = \frac{1}{2}R + t$ $\overline{VX} = \overline{BQ} = \sqrt{Rs} = \frac{\sqrt{3}}{4}R$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CXB}$:

$$\overline{CX} = \sqrt{\left(\frac{3}{16}R + t\right)^2 - \left(\frac{3}{16}R - t\right)^2} = \frac{\sqrt{3Rt}}{2} .$$

$$\overline{VC} = \overline{CX} + \overline{VX} = \frac{\sqrt{3Rt}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}R .$$

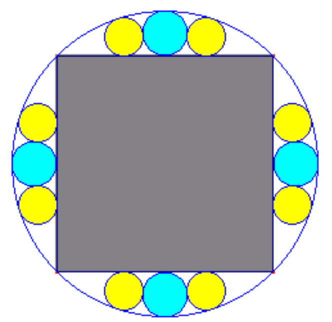
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OVC}$:

$$(R-t)^2 = \left(\frac{1}{2}R+t\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3Rt}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}R\right)^2.$$

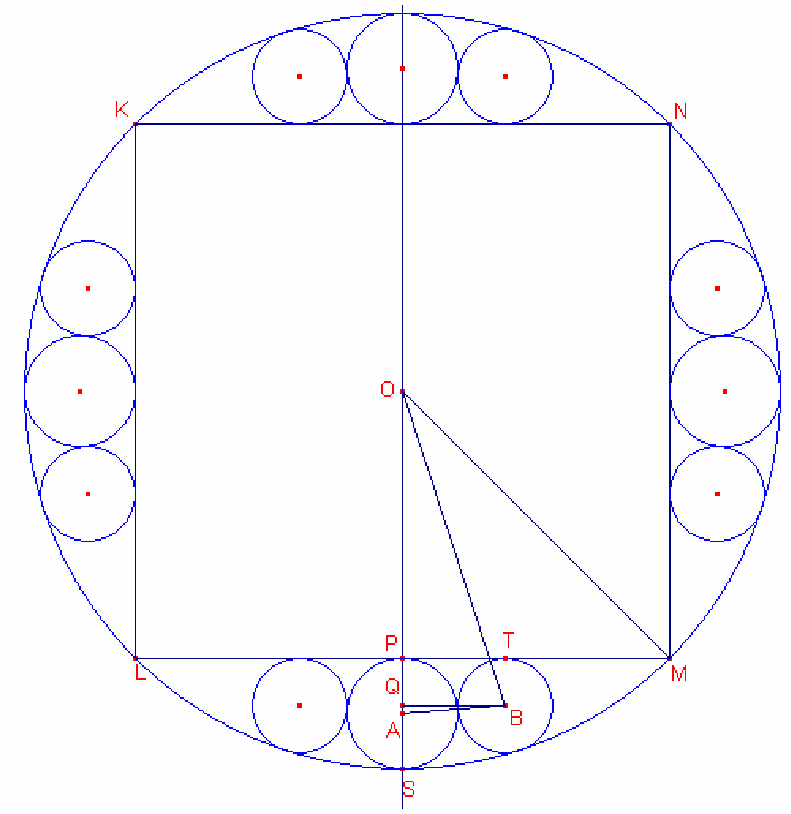
Resolent l'equació en la incògnita t:

$$t = \frac{9}{100}R.$$

29.- Una circumferència de radi R té inscrit un quadrat. En l'interior de la circumferència hi ha inscrites dotze circumferències tangents dos a dos i tangents als costats del quadrat (veure figura).Calculeu els radis de les cinc circumferències.



Solució:



Siga el quadrat KLMN

Siga la circumferència circumscrita al quadrat de centre O i radi $R=\overline{OM}$.

Siga P el punt mig del costat $\overline{LM}$.

$$\overline{OS}=R\,,\ \overline{OP}=\frac{\sqrt{2}}{2}R\,.$$

$$\overline{PS}=R-\overline{OP}=R-\frac{\sqrt{2}}{2}R=\frac{2-\sqrt{2}}{2}R\,.$$

Siga la circumferència de centre A i radi $r=\overline{AP}$.

$$\overline{AP}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}R\,.$$

Siga la circumferència de centre B i radi $s=\overline{BT}$.

$$\overline{OB}=R-s\,,\ \overline{AB}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}R+s\,,\ \overline{PQ}=\overline{BT}=s\,,\ \overline{AQ}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}R-s\,,\ \overline{OQ}=\frac{\sqrt{2}}{2}R+s\,,$$

$$\overline{OA}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}R\,.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AQB}$:

$\overline{BQ} = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}R + s\right)^2 - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}R - s\right)^2} = \sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)Rs}$.

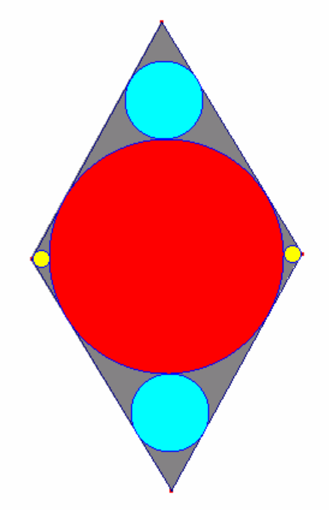
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQB}$:

$\overline{OQ} = \sqrt{(R-s)^2 - \left(\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)Rs}\right)^2} = \sqrt{R^2 + s^2 + \left(-4+\sqrt{2}\right)Rs}$.

$\overline{OA} = \overline{AQ} + \overline{OQ}$, aleshores:

$\frac{2+\sqrt{2}}{4}R = \frac{2-\sqrt{2}}{4}R - s + \sqrt{R^2 + s^2 + \left(-4+\sqrt{2}\right)Rs}$. Resolent l'equació en la incògnita s:

$s = \frac{1}{8}R$.



30.- Els angles aguts d'un rombe mesuren 60º i el costat c. Dins del rombe s'han inscrit cinc circumferències (veure figura). Calculeu el radi de les cinc circumferències.

Solució:

Considerem el rombe ABCD $c=\overline{AB}$, $\angle ABC = 60^{\circ}$.

Siga la circumferència de centre O i radi $r=\overline{OP}$.

El triangle $\overset{?}{\mathrm{ACD}}$ és equilàter, $\overline{AC}=c$.

$\overline{OA}=\frac{c}{2}$, $\angle PAO = 60^{\circ}$. Aleshores $\overline{AP}=\frac{\overline{OA}}{2}=\frac{c}{4}$,

$r=\overline{OP}=\frac{\sqrt{3}}{4}c$.

Considerem la circumferència de centre N i radi $s=\overline{MN}=\overline{TN}$.

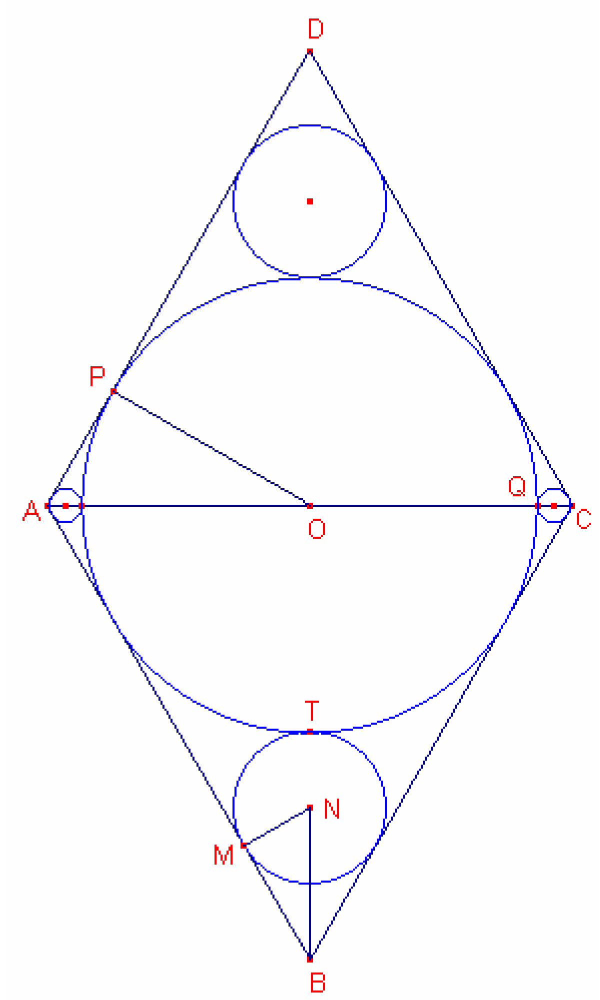
$\overline{OT}=\frac{\sqrt{3}}{4}c$, $\overline{OB}=\frac{\sqrt{3}}{2}c$,

$\overline{BN}=\overline{OB}-\overline{OT}-\overline{TN}=\frac{\sqrt{3}}{2}c-\frac{\sqrt{3}}{4}c-s$.

$\angle NBM = 30^{\circ}$, Aleshores, $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BN}$.

$s=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}c-s}{2}$. Resolent l'equació en la incògnita s:

$s=\frac{\sqrt{3}}{12}c$.



Considerem la circumferència de centre K i radi $t=\overline{KL}=\overline{KQ}$.

$\overline{OQ}=\frac{\sqrt{3}}{4}c$, $\overline{OC}=\frac{1}{2}c$,

$\overline{CK}=\overline{OC}-\overline{OQ}-\overline{KQ}=\frac{1}{2}c-\frac{\sqrt{3}}{4}c-t$.

$\angle LKC = 30^{\circ}$, Aleshores, $\overline{KL}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{CK}$.

$t=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}c-t\right)$.

Resolent l'equació en la incògnita t:

$t=\frac{7\sqrt{3}-12}{4}c$.