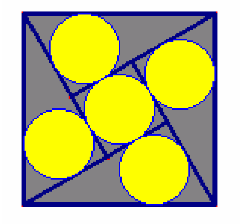
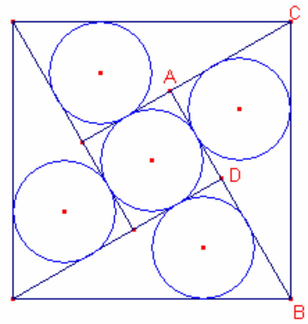
Problemes de geometria per a l'ESO 4

31.- El costat del quadrat exterior de la figura mesura a i els 4 triangles rectangles són iguals.
S'han inscrit 5 cercles iguals, quatre dins dels triangles rectangles i l'altre en el quadrat interior. Calculeu el radi dels cercles.
Sangaku pàg 176



Solució 1:

Considerem el triangle rectangle $\overset{?}{ABC}$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$.
Siga $x = \overline{AD}$ costat del quadrat menor. $\overline{BD} = \overline{AC} = b$.

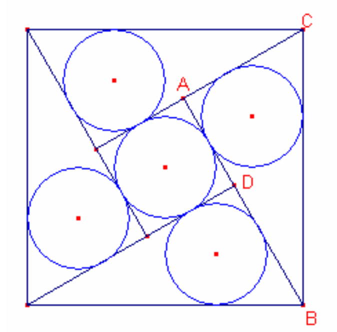


El cercle de radi r està inscrit en el quadrat, aleshores: $r = \frac{x}{2}$.
El radi de la circumferència inscrita a un triangle rectangle és:
$r = \frac{\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}}{2}$.
$\frac{x}{2} = \frac{b + x + b - a}{2}$. Simplificant: $a = 2b$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$(x+b)^2 = a^2 - b^2$. Simplificant: $x^2 + 2bx - a^2 = 0$.

$x^2 + ax - a^2 = 0$. Resolent l'equació en la incògnita x: $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a$.
Aleshores el radi de les circumferències és:
$r = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}a$.

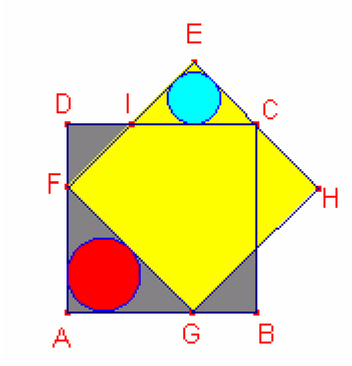
Solució 2:
Siga $\overline{AD} = 2r$, $x = \overline{BD} = \overline{AC}$.



Calculant l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$S_{ABC} = \frac{x(x+2r)}{2} = \frac{a + 2x + 2r}{2}r$. Simplificant:
$x^2 - ar - 2r^2 = 0$ (1)
$4r^2 = 2x^2 - 2ar$ (2)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$x^2 + (x + 2r)^2 = a^2$. Simplificant:
$2x^2 + 4r^2 + 4rx - a^2 = 0$ (3)
Substituint l'expressió (2) en l'expressió (3):
$4x^2 + 4rx - 2ar - a^2 = 0$. Factoritzant:
$(2x + a)(2x - a) + 2r(2x - a) = 0$. $(2x + a + 2r)(2x - a) = 0$.

Com que $2x + a + 2r \neq 0$. Aleshores $x = \frac{a}{2}$ (4)
Substituint l'expressió (4) en l'expressió (1)
$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - ar - 2r^2 = 0$. Resolent l'equació en r, $r = \frac{\sqrt{3}-1}{4}a$.



32.- Donat el quadrat ABCD dibuixem el quadrat EFGH tal que $\angle AFG = 45^{o}$ i que conté el vèrtex C. Calculeu la proporció entre els radis dels cercles inscrits als triangles $\overset{\Delta}{AFG}$, $\overset{\Delta}{CEI}$.
Sangaku pàg 190

Solució:

Siga el costat del quadart ABCD $\overline{AB} = a$.

Siga $x = \overline{AF} = \overline{AG}$.

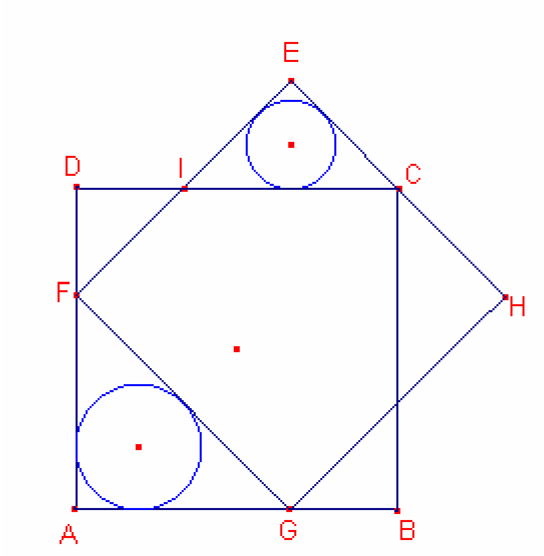
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FAG}$:

$\overline{FG} = x\sqrt{2}$.

$\overline{IC} = x$.

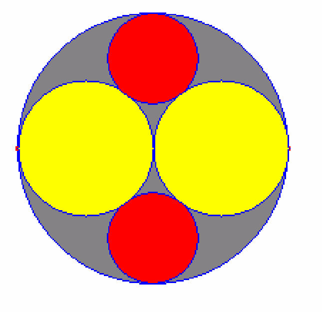
Els triangles rectangles isòsceles, $\overset{\Delta}{IEC}$ són semblants i la raó de semblança és:

$$\frac{\overline{IC}}{\overline{FG}} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



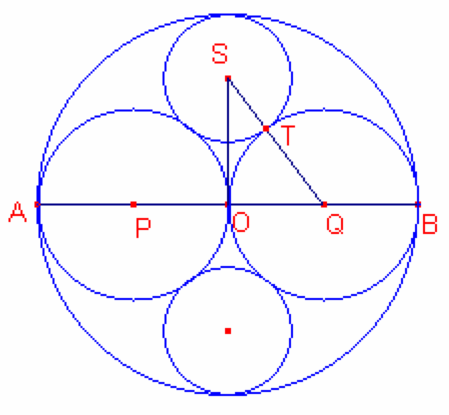
Aleshores, Calculeu la proporció entre els radis dels cercles inscrits als triangles $\overset{\Delta}{FAG}$, $\overset{\Delta}{IEC}$ és $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

33.- El radi de la circumferència gran és R.
Les mitjanes passen pel centre de la gran i són tangents interior a la circumferència gran.
Les circumferències menudes són tangents interior a la circumferència gran i tangents exterior a les dues circumferències menudes.
Calculeu el radi de les circumferències.



Solució:

Siga $\overline{AB}$ diàmetre de la circumferència gran, de centre O i radi $R = \overline{OB}$.
La circumferència mitjana te centre Q, punt mig del segment $\overline{OB}$.



El radi de la circumferència mitjana és $\overline{QB} = \dfrac{\overline{OB}}{2} = \dfrac{R}{2}$.

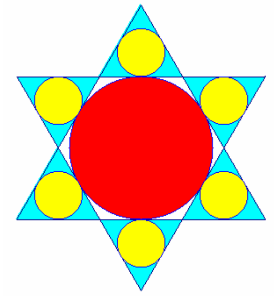
Siga S en centre d'una circumferència menuda i $\overline{ST} = s$ el seu radi.

$\overline{OS} = R - s$, $\overline{OQ} = \dfrac{R}{2}$, $\overline{SQ} = \dfrac{R}{2} + s$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SOQ}$:

$\left(\dfrac{R}{2} + s\right)^2 = (R - s)^2 + \left(\dfrac{R}{2}\right)^2$. Resolent l'equació en la incògnita s:

$s = \dfrac{1}{3}R$.



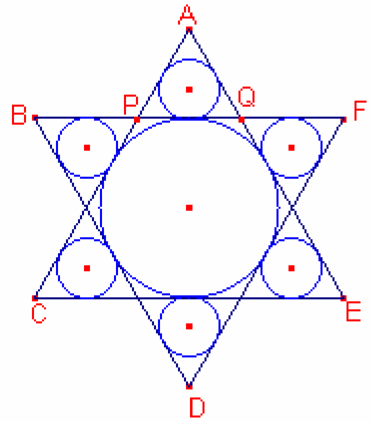
34.- Una estrella regular de sis puntes i 7 circumferències. Calculeu la proporció entre el radis de les circumferències menudes i la gran.

Solució:

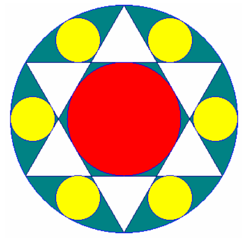
En l'estrella ABCDEF els triangles $\overset{\Delta}{ACE}$, $\overset{\Delta}{BDF}$.

La circumferència gran està inscrita al triangle equilàter $\overset{\Delta}{ACE}$.
La circumferència menuda està inscrita al triangle equilàter $\overset{\Delta}{APQ}$.

El costat del triangle $\overset{\Delta}{APQ}$ és la tercera part del costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ACE}$.
Aleshores la proporció entre els radis és 1:3.



35.- El cercle exterior té radi R. En el cercle exterior està inscrita una estrella regular de sis puntes i set cercles (veure figura). Calculeu el radi dels dos tipus de cercles.



Solució:

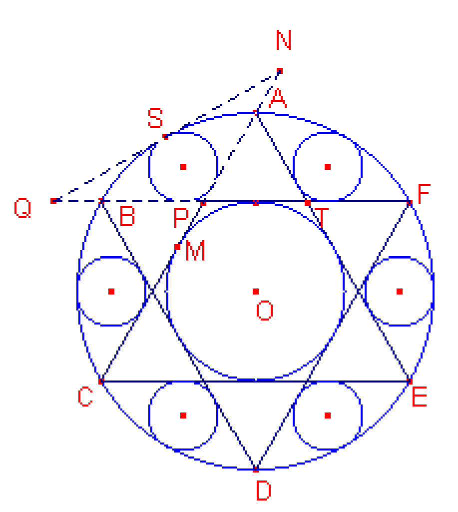
En l'estrella ABCDEF els triangles $\overset{\Delta}{ACE}$, $\overset{\Delta}{BDF}$.
Siga O en centre de l'estrella.
$\overline{OA} = R$

La circumferència gran està inscrita al triangle equilàter $\overset{\Delta}{ACE}$.

Siga $\overline{AP} = \overline{PT} = \overline{OP} = a$. $\overline{PM} = \dfrac{a}{2}$.

Siga $r = \overline{OM}$ el radi de la circumferència de centre O que passa pel punt M.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMP}$:



$r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

$\overline{AM} = \dfrac{3}{2}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMA}$:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = a\sqrt{3}.$$

Aleshores, $a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}R$.

Per tant, $r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a = \dfrac{1}{2}R$.

$\overline{PS} = \overline{OS} - \overline{OP} = \left(\sqrt{3}-1\right)a$, $\angle SNP = 30^o$. Aleshores:

$\overline{NP} = 2\cdot\overline{PS} = 2\left(\sqrt{3}-1\right)a$, $\overline{NS} = \sqrt{3}\cdot\overline{PS} = \left(3-\sqrt{3}\right)a$.

$\overline{NQ} = 2\overline{NS} = 2\left(3-\sqrt{3}\right)a$.

La circumferència menuda està inscrita al triangle $\overset{\Delta}{NQP}$. Siga s el seu radi.

Calculem l'àrea del triangle $\overset{?}{NQP}$:

$$S_{NQP} = \frac{\overline{NQ}\cdot\overline{SP}}{2} = \frac{\overline{NQ}+2\overline{NP}}{2}s.$$

$\dfrac{2\left(3-\sqrt{3}\right)a\left(\sqrt{3}-1\right)a}{2} = \dfrac{2\left(3-\sqrt{3}\right)a+4\left(\sqrt{3}-1\right)a}{2}s$. Resolent l'equació en la incògnita s:

$s = \left(9-5\sqrt{3}\right)a$.

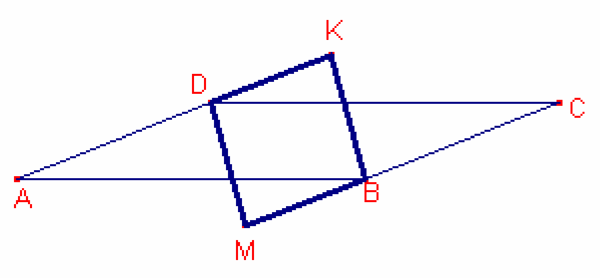
$s = \left(3\sqrt{3}-5\right)R$.

La proporció entre els radis és:

$$\frac{s}{r} = \frac{3\sqrt{3}-5}{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{3}-10.$$

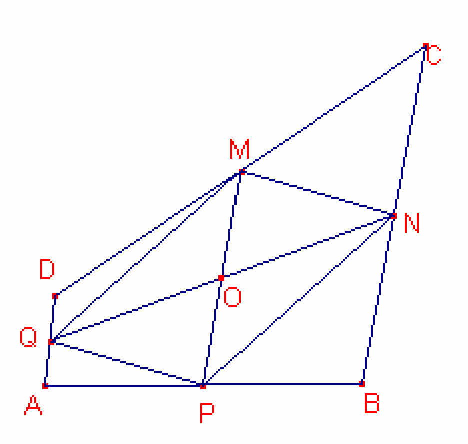
36.- En un paral·lelogram ABCD, $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$, $a > b$, $\angle BAD = \alpha$, $\alpha < 90^\circ$.
Els punts K i M pertanyen als costats $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ respectivament tal que BKDM és un rombe. Determineu el costat del rombe.
Shariguin I103

Solució:
Siga $x = \overline{BK} = \overline{DK}$.



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABK}$:
$x^2 = a^2 + (b+x)^2 - 2a(b+x)\cos\alpha$. Simplificant:
$a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\alpha - 2(a\cdot\cos\alpha - b)x = 0$.
Resolent l'equació: $x = \dfrac{a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\alpha}{2(a\cdot\cos\alpha - b)}$.

37.- Els segments que uneixen els punts mig dels costats oposats d'un quadrilàter convex són iguals a a, b i s'intersecten formant un angle de 60º. Calculeu les diagonals del quadrilàter.
Shariguin I123



Solució:
Els punts mig d'un quadrilàter convex formen un paral·lelogram.
Siga ABCD el quadrilàter convex.
Siguen M, N, P, Q els punts mig dels costat del quadrilàter ABCD.
MNPQ formen un paral·lelogram
Siga O la intersecció de les diagonals del paral·lelogram MNPQ.
Siga $a=\overline{MP}$, $b=\overline{NQ}$, $\angle MON=60^\circ$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{MNO}$:

$$\overline{MN}^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-2\frac{a}{2}\frac{b}{2}\cos 60^\circ .$$

$$\overline{MN}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-ab} .$$

$\overline{MN}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$, aleshores:

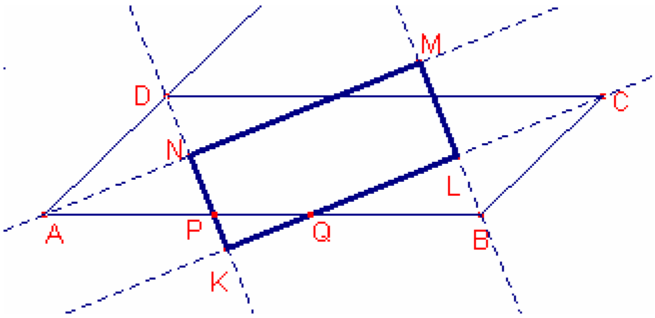
$$\overline{BD}=2\cdot\overline{MN}=\sqrt{a^2+b^2-ab} .$$

Anàlogament, $\overline{AC}=\sqrt{a^2+b^2+ab}$.

38.- Un paral·lelogram de costats a, b i un angle a té traçades les bisectrius dels 4 angles. Calculeu l'àrea del quadrilàter limitat per les bisectrius.
Shariquin I29

Solució:

Siga el paral·lelogram ABCD, $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$, $a = \angle DAB$.
Siga KLMN el rectangle format per les 4 bisectrius del paral·lelogram ABCD.
Siguen P, Q la intersecció del rectangle KLMN i el costat $\overline{AB}$.
Notem que $\overline{BQ} = \overline{AP} = b$. Aleshores:



$\overline{PQ} = a - 2b$.

$\frac{\overline{LQ}}{b} = \cos\frac{a}{2}$.

$\frac{\overline{KQ}}{a-2b} = \cos\frac{a}{2}$.

Aleshores, $\overline{KL} = \overline{LQ} + \overline{KQ} = (a-b)\cos\frac{a}{2}$.

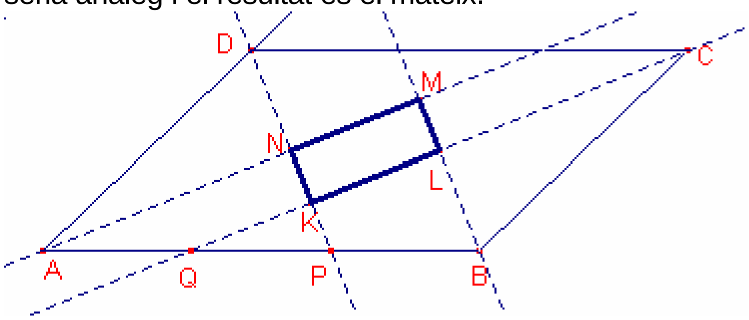
$\frac{\overline{NP}}{b} = \sin\frac{a}{2}$.

$\frac{\overline{KP}}{a-2b} = \sin\frac{a}{2}$.

Aleshores, $\overline{KN} = \overline{KP} + \overline{NP} = (a-b)\sin\frac{a}{2}$.

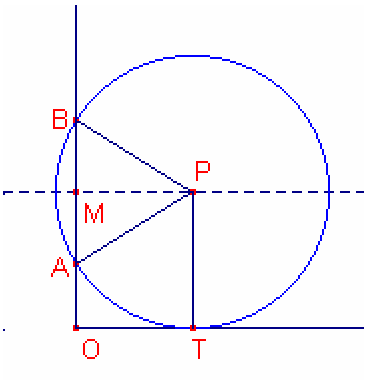
$S_{KLMN} = \overline{KL}\cdot\overline{KN} = \frac{1}{2}(a-b)^2 \sin a$.

Si el quadrat KLMN és interior al paral·lelogram ABCD el procediment de resolució seria anàleg i el resultat és el mateix.



39.- En el costat d'un angle recte amb vèrtex O s'agafen els punts A, B, tal que $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$. Determineu el radi de la circumferència que passa per A, B i és tangent a l'altre costat de l'angle.
Shariguin I21

Solució:



Siga P el centre de la circumferència que passa pels punts A, B i és tangent a l'altre costat de l'angle recte. Siga r el radi d'aquesta circumferència.

P pertany a la mediatriu del segment $\overline{AB}$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$.

$\overline{OM} = \frac{a+b}{2}$.

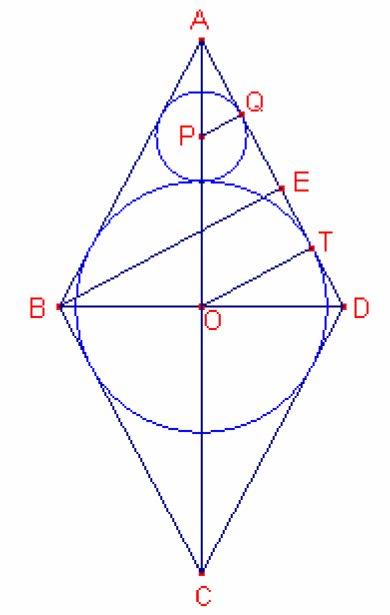
Per ser la circumferència tangent a l'altre costat,

$r = \overline{OM} = \frac{a+b}{2}$.

40.- Un rombe l'altura del qual és h i angle agut a té inscrita una circumferència. Determineu el radi de la circumferència major de les possibles, cadascuna de les quals és tangent a la circumferència donada i a dos costats del rombe.
Shariguin I30

Solució:

Siga el rombe ABCD, $\overline{AB} = c$, $\angle BAC = a$
Siga O la intersecció de les diagonals.
Siga $h = \overline{BE}$ altura del rombe.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BEA}$:

$$c = \frac{h}{\sin a}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOD}$:

$$\overline{OA} = c \cdot \cos\frac{a}{2}.$$

$$\overline{OA} = \frac{h}{\sin a} \cdot \cos\frac{a}{2} = \frac{h}{2\sin\frac{a}{2}}.$$

Siga $r = \overline{OT}$ el radi de la circumferència inscrita al rombe ABCD.

$$r = \frac{\overline{BE}}{2} = \frac{h}{2}.$$

Siga $s = \overline{PQ}$ el radi de la circumferència tangent a la circumferència inscrita al rombe i als costats $\overline{AB}, \overline{AD}$ del rombe.

Els triangles $\overset{\Delta}{AOT}$, $\overset{\Delta}{APQ}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{OT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PA}}.$$

$$\frac{\frac{h}{2}}{\frac{h}{2\sin\frac{a}{2}}} = \frac{s}{\frac{h}{2\sin\frac{a}{2}} - \left(\frac{h}{2} + s\right)}$$

Aïllant s:

$$s = \frac{h}{2}\frac{1 - \sin\frac{a}{2}}{1 + \sin\frac{a}{2}}.$$