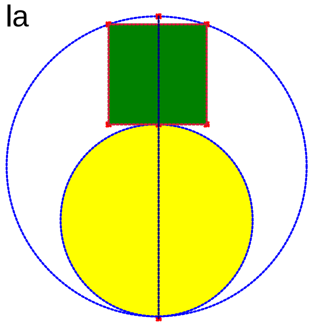
Problemes de Geometria per a l'ESO 40

391.- En la figura el radi de la circumferència gran és R i el radi de la circumferència tangent interior és r. Determineu el costat del quadrat.



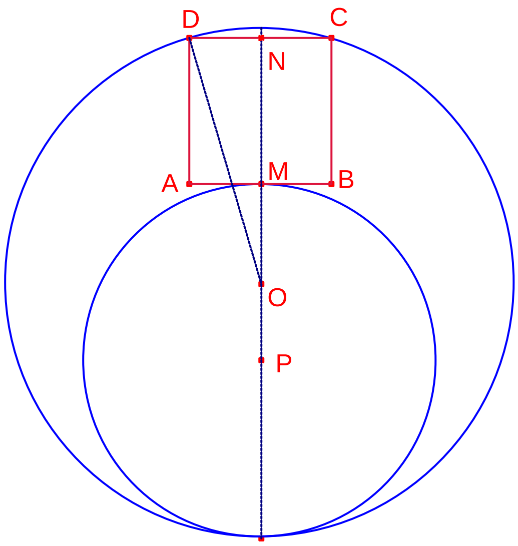
Solució:

Siga $c = \overline{AB}$ el costat del quadrat ABCD.
Siga O el centre de la circumferència gran.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$ del quadrat.
Siga N el punt mig del costat $\overline{CD}$ del quadrat.

$\overline{OP} = R$, $\overline{DN} = \frac{c}{2}$.

$\overline{OM} = |2r - R|$.

$\overline{ON} = |2r - R| + c$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OND}$:

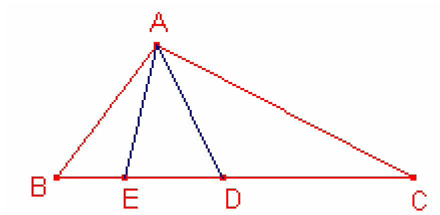
$R^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + (|2r - R| + c)^2$.

$5c^2 + 4|2r - R|c + 4r^2 - 4rR = 0$.

Resolent l'equació:

$c = \frac{4}{5}\left(R - 2r + \sqrt{R^2 - r^2 + rR}\right)$.

392.- En el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ els punts D, E pertanyen al costat $\overline{BC}$ de forma que $\overline{BD} = \overline{BA}$ i $\overline{CE} = \overline{CA}$. Si l'angle $\angle DAE = 40^o$, calculeu la mesura de l'angle $\angle BAC$.

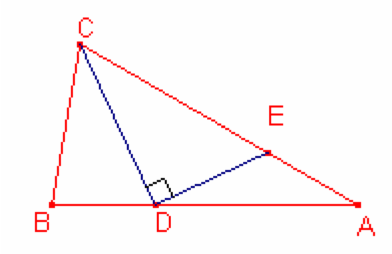


Solució:
Siga $\alpha = \angle ADB = \angle BAD$.
Aleshores, $\angle BAE = \alpha - 40^o$, $\angle ABD = 180^o - 2\alpha$.
Per tant, $\angle AEC = \angle BAE + \angle ABD = 140^o - \alpha$.
$\angle EAC = \angle AEC = 140^o - \alpha$

$\angle BAC = \angle BAE + \angle EAC = \alpha - 40^o + 140^o - \alpha = 100^o$.

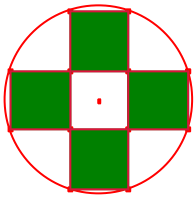
393.- En el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $B-A=50º$, la bisectriu al vèrtex C talla el costat $\overline{AB}$ en el punt D.
Siga E el punt del costat $\overline{AC}$ tal que $\angle CDE = 90º$.
Determineu la mesura de l'angle $\angle ADE$.

Solució:

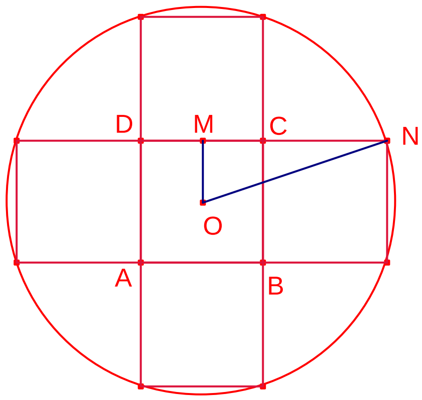


Siga $\alpha = \angle ADE$.
$\angle DCA = 90º - \alpha - A$.
$C = 2\angle ADE = 180º - 2\alpha - 2A$.
$A + B + C = 180º$, aleshores:
$A + B + 180º - 2\alpha - 2A = 180º$.
$B - A - 2\alpha = 0$.
$50º = 2\alpha$.
$\alpha = 25º$.

394.- En una circumferència de radi R s'han dibuixat 4 quadrats iguals.
Calculeu la mesura del costat del quadrat.



Solució:
Els 4 quadrats determinen un cinquè quadrat ABCD de centre O (centre de la circumferència.
Siga $c = \overline{AB}$ costat dels 5 quadrats.
Siga M el punt mig del costat



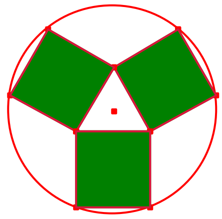
$\overline{OM} = \frac{1}{2}c$, $\overline{MN} = \frac{3}{2}c$, $\overline{ON} = R$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMN}$:

$R^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + \left(\frac{3}{2}c\right)^2$. Resolent l'equació en la incògnita c:

$c = \frac{R\sqrt{10}}{5}$.

395.- En una circumferència de radi R s'han dibuixat 4 quadrats iguals. Calculeu la mesura del costat del quadrat.

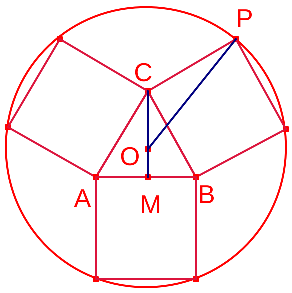


Solució:

Els tres quadrats determinen el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de centre O.

Siga $c=\overline{AB}$ costat dels 3 quadrats.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:

$$\overline{CM}=\frac{\sqrt{3}}{2}c .$$

Aplicant la propietat del baricentre O del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\overline{OC}=\frac{2}{3}\overline{CM}=\frac{\sqrt{3}}{3}c .$$

$$\angle OCO=120^{\circ} .$$

$$\overline{OP}=R , \ \overline{CP}=c .$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{OCP}$:

$$R^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}c\right)^2+c^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}c\cdot c\cdot\cos 120^{\circ} .$$

$$R^2=\left(\frac{4+\sqrt{3}}{3}\right)c^2 .$$

Resolent l'equació en la incògnita c:

$$c=R\sqrt{\frac{3\left(4-\sqrt{3}\right)}{13}} .$$

396.- Donat el rectangle ABCD $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, siga P el punt del costat $\overline{AB}$ de tal forma que el segment $\overline{DP}$ és tangent a la circumferència de diàmetre $\overline{BC}$. Siga E el punt de tangència.

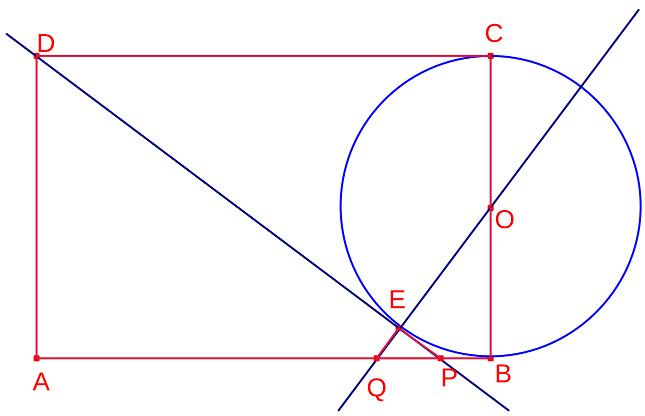
La recta que passa pel centre de la circumferència i el punt E talla el costat $\overline{AB}$ en el punt Q.

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQE}$.

KöMaL, B3495

Solució:

Siga O el centre de la circumferència de diàmetre $\overline{BC}$.



El quadrilàter CDEO és inscriptible,

aleshores, $\angle EOC = 180^{o} - \angle CDQ$.

$\angle EOB = 180^{o} - \angle EOC = \angle CDE$.

Per tant, els angles

$\angle CDO = \angle ODE = \angle POB = \angle OEP$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DCO}$, $\overset{\Delta}{PBO}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{1}{3}=\frac{\overline{PB}}{1}$, aleshores, $\overline{PB}=\frac{1}{3}$, $\overline{AP}=\frac{8}{3}$.

$\overline{PE}=\overline{PB}=\frac{1}{3}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAP}$, $\overset{\Delta}{QEP}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{2}{\frac{8}{3}}=\frac{\overline{QE}}{\frac{1}{3}}$, aleshores, $\overline{QE}=\frac{1}{4}$.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQE}$ és:

$$S_{PQE}=\frac{\overline{QE}\cdot\overline{PE}}{2}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{24}.$$

397.- Els costat paral·lels d'un trapezi mesuren 1500m, 2100m els no paral·lels mesuren 37m i 613.
Calculeu l'àrea del trapezi.
KöMaL, C773.

Solució:

Siga del trapezi de bases $\overline{AB} = 2100$, $\overline{CD} = 1500$, $\overline{AD} = 37$, $\overline{BC} = 613$.

Siga $h = \overline{DH} = \overline{CI}$ altura del trapezi.

Siga $x = \overline{AH}$.

$\overline{BI} = 600 + x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADH}$:

$$37^2 = x^2 + h^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCI}$:

$$613^2 = (600 + x)^2 + h^2 \qquad (2)$$

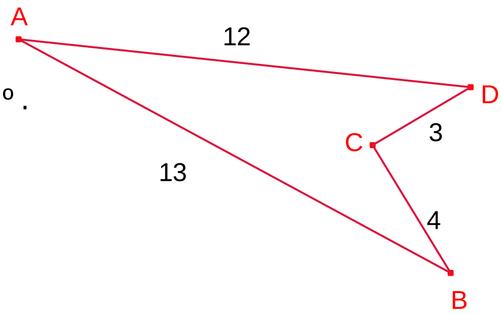
Considerem els sistema format per les expressions (1) i (2):

$\begin{cases} 37^2 = x^2 + h^2 \\ 613^2 = (600 + x)^2 + h^2 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} x = 12 \\ h = 35 \end{cases}$.

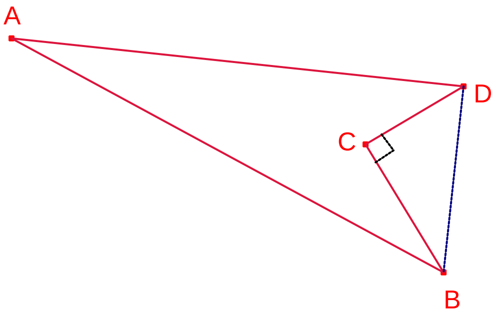
L'àrea del trapezi és:

$$S_{ABCD} = \frac{2100 + 1500}{2} 35 = 63000 m^2.$$



398.- Determineu l'àrea del quadrilàter ABCD sabent que $\overline{AB}=13$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CD}=3$, $\overline{AD}=12$ i l'angle $C=270^{o}$.
KöMaL, K17.

Solució:



L'angle exterior $\angle DCB=90^{o}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCD}$:
$\overline{BD}=5$.

L'àrea del quadrilàter ABCD és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$.

Aplicant la fórmula d'Heró l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és:

$$S_{ABD}=\frac{\sqrt{(13+5+12)(-13+5+12)(13-5+12)(13+5-12)}}{4}=30.$$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és:

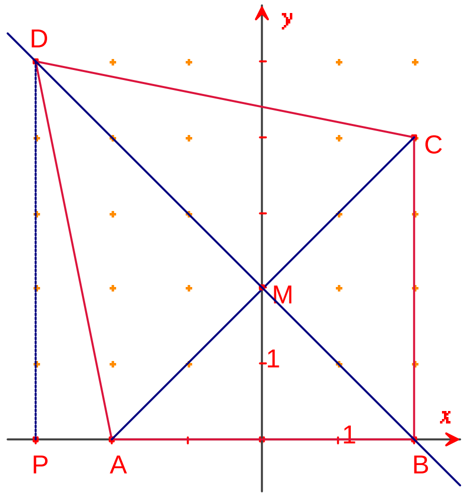
$$S_{BCD}=\frac{4\cdot 3}{2}=6.$$

L'àrea del quadrilàter ABCD és:

$$S_{ABCD}=S_{ABD}-S_{BCD}030-6=24.$$

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és rectangle i que l'àrea és $S_{ABD}=\frac{12\cdot 5}{2}=30$.

399.- L'àrea del quadrilàter ABCD és 20 (els vèrtexs estan ordenats en sentit contrari a les busques del rellotge). Si $A(-2{,}0)$, $B(2{,}0)$, $C(2{,}4)$, determineu les coordenades del vèrtex D del quadrilàter ABCD de mínim perímetre. Quin és el mínim perímetre?.
KöMaL, C1089.



Solució:

El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle, $B = 90^o$.
$\overline{AB} = 4$, $BC = 4$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC} = 4\sqrt{2}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$$S_{ABC} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{2} = 8.$$
Aleshores, $S_{ACD} = 20 - 8 = 12$.
El quadrilàter de perímetre mínim és el que fa mínim $\overline{AD} + \overline{CD}$.
El triangle de perímetre mínim, base constant i àrea constant és el isòsceles.

El vèrtex D que fa $\overline{AD} + \overline{CD}$ mínim del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ d'àrea 12 i base constant $\overline{AC}$, és el que fa el triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ isòsceles de costat desigual $\overline{AC}$.

Siga $D(a,b)$. Siga $M(0,2)$ el punt mig del segment $\overline{AC}$.

$\overline{DM}$ és l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és:
$$\frac{\overline{AC}\cdot\overline{DM}}{2} = 12. \quad \overline{DM} = \frac{24}{\overline{AC}} = 3\sqrt{2}.$$
$\overline{DM} = \sqrt{a^2 + (b-2)^2}$.

Aleshores, $a^2 + (b-2)^2 = 18$ (1)
Siga P la projecció de D sobre el eix d'abscisses.
$\overline{DM}$ és perpendicular a $\overline{AC}$ i $\angle CAB = 45^o$.

Aleshores, $\angle ABD = 45^o$. Per tant, el triangle $\overset{\Delta}{BPD}$ és rectangle i isòsceles.
Per tant, $b = 2 - a$ (2)
Considerem el sistema format per les expressions (1), (2):
$\begin{cases} a^2 + (b-2)^2 = 18 \\ b = 2 - a \end{cases}$, les solucions del qual són: $\begin{cases} a = -3 \\ b = 5 \end{cases}$, $\begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$.
La segona solució no formaria un quadrilàter amb els vèrtexs en sentit positiu.
Aleshores, $D(-3{,}5)$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APD}$:
$\overline{AD} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$
El perímetre mínim és:
$$p = \overline{AB} + \overline{BC} + 2\overline{AD} = 4 + 4 + 2\sqrt{26} = 8 + 2\sqrt{26}.$$

Nota: vegem que el triangle de perímetre mínim, de base constant i àrea constant és el isòsceles.

Els triangles $\overset{\Delta}{ACD}$ d'àrea constant i base constant $\overline{AC}$ tenen el tercer vèrtex D en una recta r paral·lela al costat $\overline{AC}$ a una distància igual a l'altura.

Considerem el punt C' simètric de C respecte de la recta r

La recta s que passa pels punts C' i A talla la recta r en el punt D.

Aquest punt D fa mínima la suma de les distàncies $\overline{AD}+\overline{CD}$ ja que si D' es qualsevol, altre punt de la recta r:

$\overline{CD'}=\overline{C'D'}$, $\overline{CD}=\overline{C'D}$.

$\overline{AD'}+\overline{CD'}=\overline{AD'}+\overline{C'D'}\geq\overline{AC'}=\overline{AD}+\overline{C'D}=\overline{AD}+\overline{CD}$.

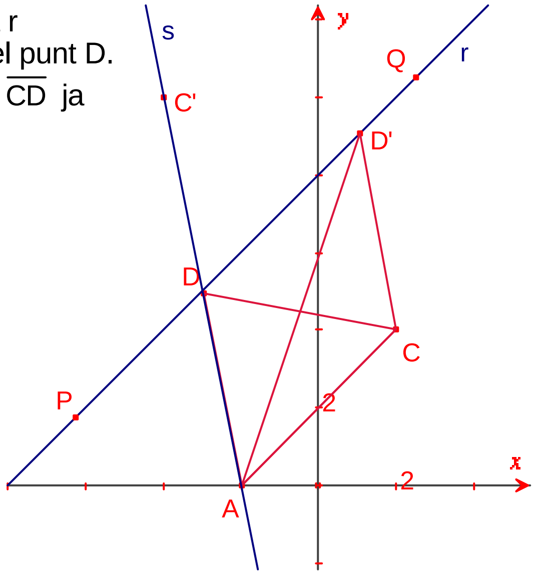
Per simetria:

$\angle QDC=\angle QDC'=\angle PDA$.

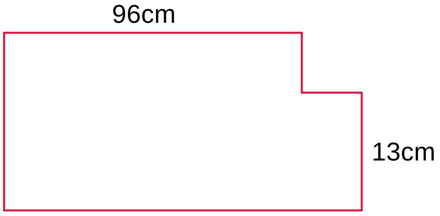
Com que $\overline{AC}$ és simètric a r:

$\angle PDA=\angle DAC$, $\angle QDC=\angle DCA$.

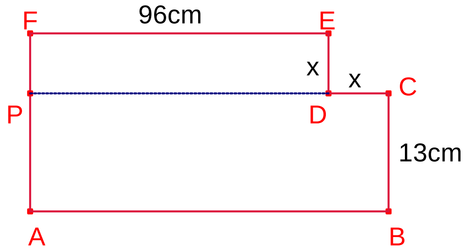
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és isòsceles.



400.- En una fulla rectangular s'ha tallat per uns dels vèrtexs superiors un quadrat (veure figura) si l'àrea que resta és $2011cm^2$ quina és l'àrea de la fulla rectangular orinal.
KöMaL, K297.



Solució:
Siga $x = \overline{CD} = \overline{DE}$ costat del quadrat que eliminem del full.
Les dimensions del rectangle original són:
$\overline{AB} = 96 + x$, $\overline{AF} = 13 + x$.
L'àrea del rectangle original és:
$S = (96 + x)(13 + x)$.



Siga P la projecció de D sobre el costat $\overline{AF}$.
L'àrea de l'hexàgon ABCDEF és igual a la suma de les àrees dels rectangles ABCP i PDEF:
$S_{ABCDEF} = (96 + x)13 + 96x = 2011$.
Resolent l'equació:
$x = 7$.
L'àrea del rectangle original és:
$S = (96 + x)(13 + x) = (96 + 7)(13 + 7) = 2060cm^2$.